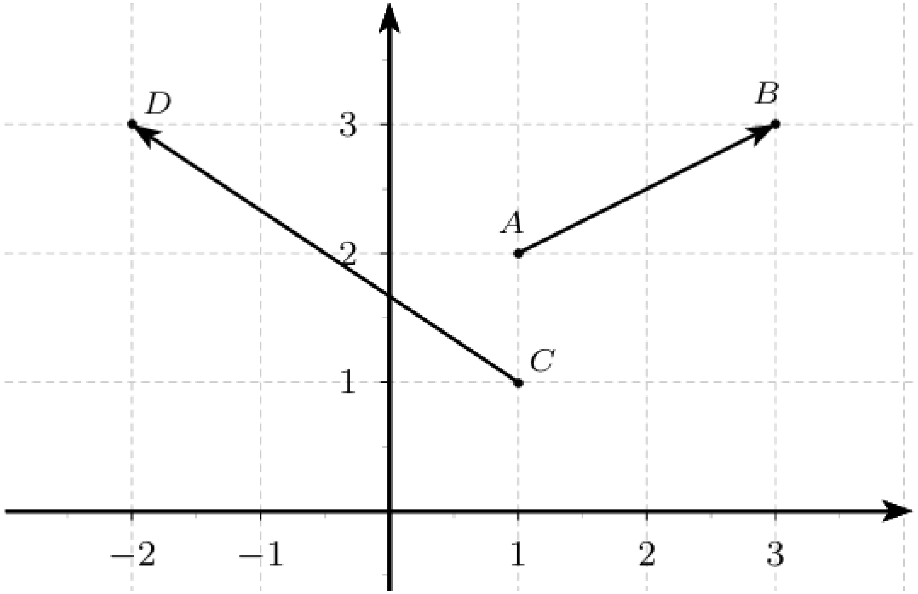
Calcul vectoriel – Exercices – Devoirs

Exercice 1 **corrigé disponible**

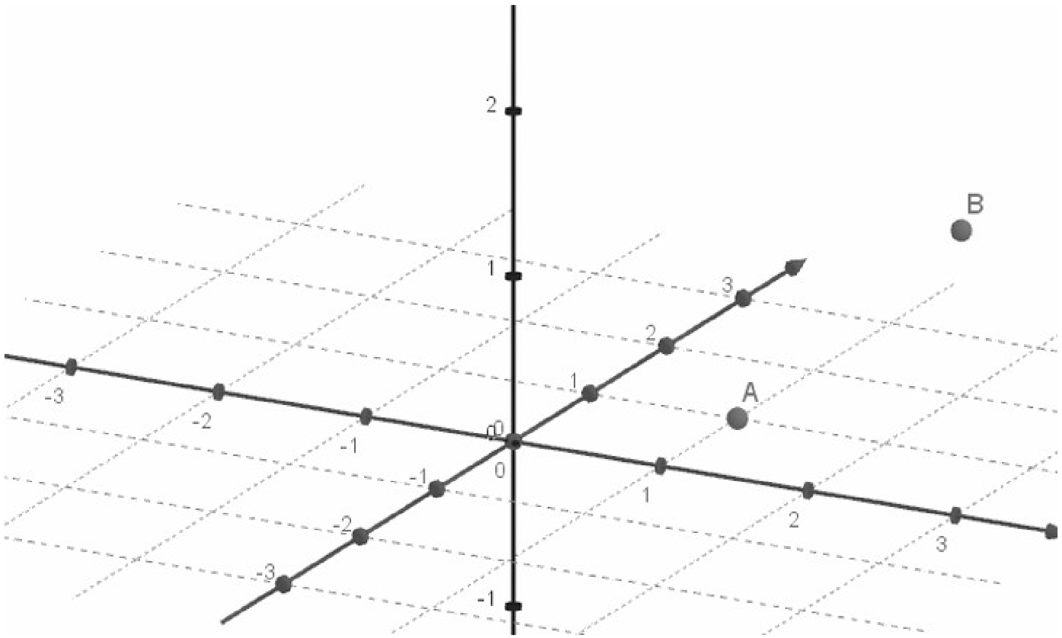
1. Donner les coordonnées des points A, B, C et D.
2. Quelles sont les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$?
3. Calculer $\|\overrightarrow{AB}\|$ et $\|\overrightarrow{CD}\|$
4. Calculer les coordonnées de G barycentre de {(A,1) ; (B,1)} ; comment appelle-t-on G ?
5. Calculer les coordonnées de H barycentre de {(A,1) ; (B,1) ; (C,1)} ; comment appelle-t-on H ?
6. Démontrer que les points C, H et G sont alignés



Exercice 2 **corrigé disponible**

On donne A(1;1;0) et B (2;2;1).

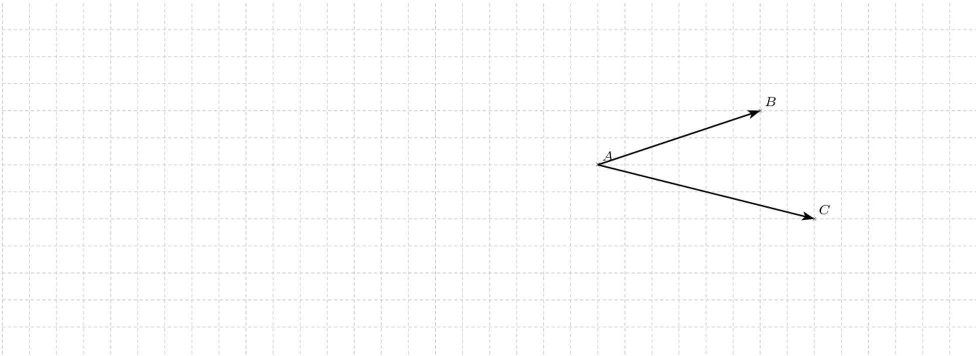
1. Quelles sont les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ puis calculer $\|\overrightarrow{AB}\|$?
2. Placer les points C(−1;−1;1) et D(0;0;2) ; quelles sont les coordonnées de $\overrightarrow{CD}$; calculer $\|\overrightarrow{CD}\|$.
3. Quelle est la nature du quadrilatère ABDC ?
4. Calculer les coordonnées de G barycentre de {(A,1) ; (B,1)} ; comment appelle-t-on G ?
5. Calculer les coordonnées de H barycentre de {(A,1) ; (B,1) ; (C,1)} ; comment appelle-t-on H ? Démontrer que A ,D et H sont alignés



Exercice 3 **corrigé disponible**

Construire les vecteurs suivants :

$\vec{u}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}$; $\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$; $\vec{w}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$; $\vec{t}=2\cdot\vec{u}$; $\vec{t}=1{,}5\cdot\vec{v}$



Exercice 4 **corrigé disponible**

On donne A(1;3), B(4;–1) et C(−1,2).

1. Calculer les coordonnées de :

   a. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ b. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ c. $-0{,}5\cdot\overrightarrow{AB}$

2. Calculer les normes de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$; le triangle ABC est-il rectangle ?

3. Quelles sont les coordonnées du centre de ABC ?

Exercice 5 **corrigé disponible**

Simplifier au maximum les relations suivantes

$\vec{u}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{ED}$

Exercice 6 **corrigé disponible**

Soit ABC un triangle.

1) Placer le point E tel que $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

2) Placer le point F tel que $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AC}$.

3) Démontrer que les droites (CE) et (FB) sont parallèles.

Exercice 7 **corrigé disponible**

Simplifier au maximum l'écriture des vecteurs suivants :

$$\vec{u}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{CB}$$

$$\vec{v}=2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AB}$$

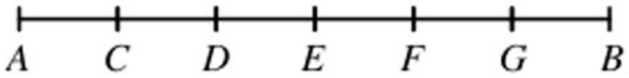
Exercice 8 **corrigé disponible**

Associer à chaque égalité vectorielle la phrase correspondante et, dans chaque cas, illustrer par une figure :

1. $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$	A. ABCD est un parallélogramme
2. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$	B. ABDC est un parallélogramme
3. $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}$	C. D est le milieu de $[AB]$
4. $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$	D. ADBC est un parallélogramme

Exercice 9

Le segment [AB] est divisé en 6 parties de même longueur.



Compléter les relations suivantes par :

- la lettre qui convient :	- le nombre qui convient :
1) $\overrightarrow{E...\ ...} = -2\,\overrightarrow{EF}$	4) $\overrightarrow{CE} = ...\ \overrightarrow{AB}$
2) $\overrightarrow{C...} + \overrightarrow{...G} = \vec{0}$	5) $\overrightarrow{AD} = ...\ \overrightarrow{BF}$
3) $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{A...}$	6) $\overrightarrow{DE} = ...\ \overrightarrow{BF}$

Exercice 10

Faire une figure et construire les barycentres :

– G de (A, 3) et (B, 1)

– K de (A, 2) et (B, −3)

– I de (A, 500) et (B, 500)

Exercice 11

A, B et C sont trois points non alignés du plan.
Construire le barycentre de (A, −1), (B, 1) et (C, 2).

Exercice 12

On considère un triangle ABC et l'on désigne par G le barycentre de (A, 1), (B, 4) et (C, – 3).

1. Construire le barycentre I de (B, 4) et (C, – 3).
2. Démontrer que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GI}=\vec{0}$
3. Construire le point G.

Exercice 13

On se place dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Soit A(2; −1), B(−1; 3) et C(0; −1)
Calculer les coordonnées du barycentre G de (A, 1), (B, 1) et (C, 2).
Soit I le milieu de [AB]. Prouver que G est le milieu de [IC].

Exercice 14

ABC est un triangle.

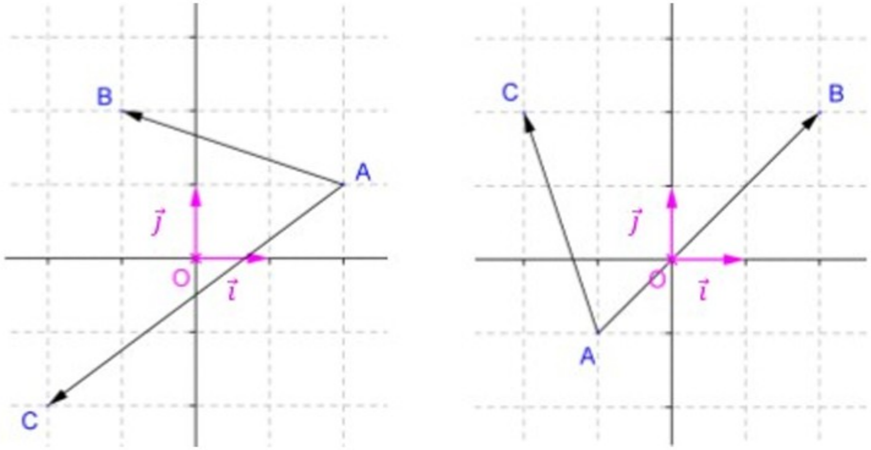
1. G est le barycentre de (A, 1)(B, 2)(C, 3). Construire le point G.
2. G' est le barycentre de (A, 1)(B, 3)(C, -3). Construire le point G'.
3. Démontrer que (AG') est parallèle à (BC).

Exercice 15

MNPQ est un carré avec MN = 6. I est le centre du carré.
Calculer les produits scalaires suivants :

$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{QP}$ $\quad\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{PN}$ $\quad\overrightarrow{IN}\cdot\overrightarrow{IP}$ $\quad\overrightarrow{QI}\cdot\overrightarrow{NI}$

Exercice 16



1) Dans chacun des cas calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

2) En déduire $\widehat{BAC}$

Exercice 17

ABC est un triangle équilatéral de côté 5 cm. I est le milieu de [BC].
Calculer les produits scalaires suivants :

1) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ 2) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CI}$ 3) $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AI}$

Exercice 18

ABC est un triangle dans lequel AB = 2 et AC = 3.
De plus $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$.
Ce triangle est-il rectangle en A ?

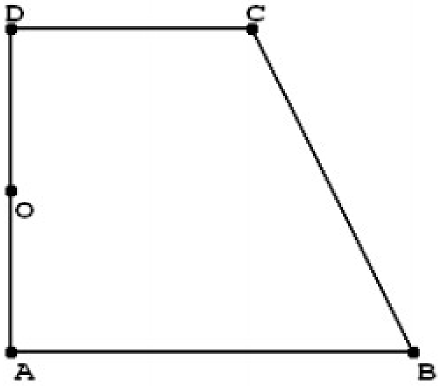
Exercice 19

On considère un trapèze $ABCD$ rectangle en A et D tel que $AB = 5$, $CD = 3$ et $AD = 4$.

On note O le milieu de $[AD]$.

Calculer :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ $\quad \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$ $\quad \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC}$ $\quad \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ $\quad \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}$



Exercice 20

Les vecteurs $\vec{u}$ (4876 ; -4898873) et $\vec{v}$ (317019173 ; 315539) sont-ils orthogonaux ?

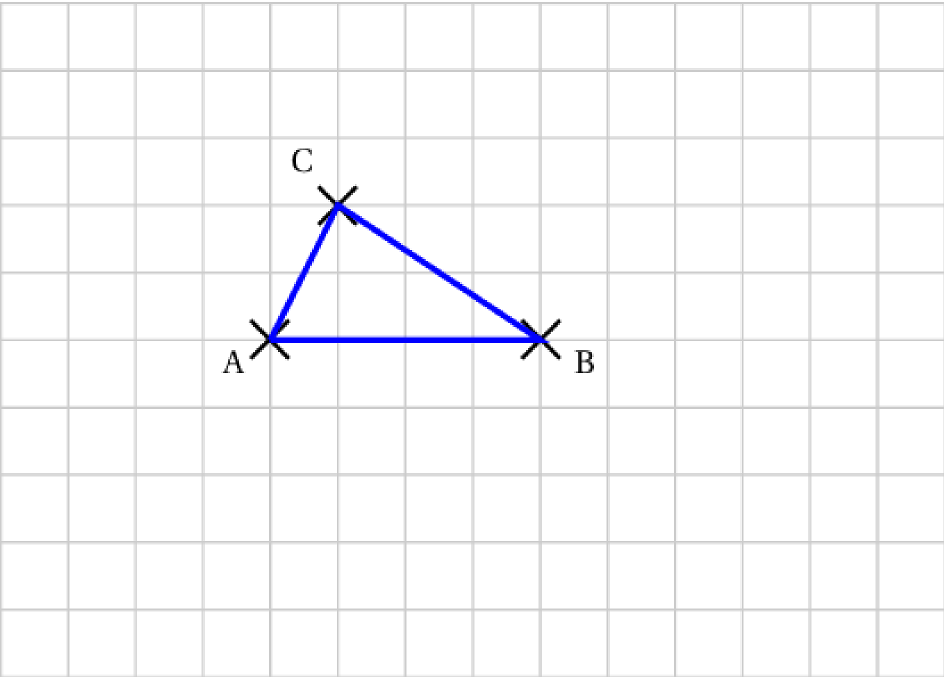
Exercice 21

On considère un triangle ABC.

1. Construire les points I, J, K et L définis par :

1. a. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$; **1. c.** $\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$;

1. b. $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$; **1. d.** $\overrightarrow{BL} = -2\overrightarrow{AC}$;



2. Démontrer que $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AB}$

3. En déduire que le quadrilatère CIKJ est un parallélogramme.

Exercice 22

Dans un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan, on considère les points $A(2;-2)$, $B(6;1)$, $C(1;4)$ et $D(-3;1)$.

1. Placer les points A, B, C et D dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
2. Démontrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.
3. Placer les points M et N tel que :

$$\overrightarrow{BM} = -2\overrightarrow{BA} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$$

4. Calculer les coordonnées des points M et N.
5. Démontrer que les points M, C et N sont alignés.

Exercice 23

Soit ABC un triangle quelconque, on note A' le milieu du segment [BC], B' le milieu du segment [AC] et C' le milieu du segment [AB].

Soit M un point du plan tel que :

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

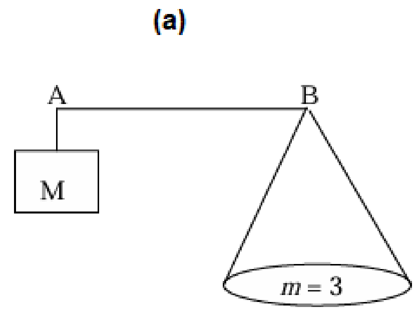
1. Montrer qu'alors : $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.
2. On admet que l'on a aussi : $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$

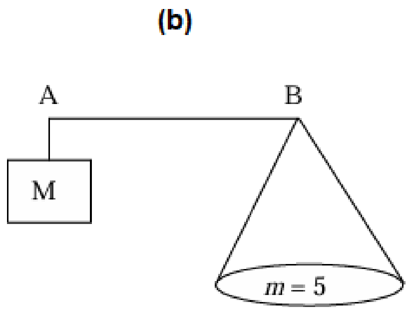
En déduire que les trois médianes du triangle sont concourantes en M.

Exercice 24

Une balance est constituée d'une masse M=2kg et d'un plateau fixé à l'extrémité d'une tige. Pour peser une masse m, le vendeur place, à une position précise, un crochet sur la tige. Cette balance a l'avantage, pour le commerçant, de ne pas manipuler plusieurs masses.

1. Pour chacun des cas suivants, où faut-il fixer le crochet G sur le segment [AB] pour réaliser l'équilibre ?





2. Le point G est tel que $\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AG}$. Quelle est la masse m pesée ?

Exercice 25

Soit ABCD un carré et K le barycentre des points pondérés (A, 2), (B, – 1), (C, 2) et (D, 1). Soit I le barycentre des points pondérés (A, 2), (B, – 1) et J celui de (C, 2) et (D, 1).

1. Placer I et J en justifiant.
2. Réduire l'écriture des vecteurs suivants : $2\overrightarrow{KA}-\overrightarrow{KB}$ et $2\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}$.
En déduire que K est le barycentre de (I, 1) et (J, 3).
3. Placer K en justifiant.

Exercice 26

1. Placer dans un repère les points A (1, 2), B (– 3, 4) et C (– 2, 5).
Soit G le barycentre des points pondérés (A, 3), (B, 2) et (C, – 4).
2. Quelles sont les coordonnées de G ? Placer G.
3. La droite (BG) passe t-elle par l'origine du repère ? Justifier.

Exercice 27

ABCD est un carré.

1. Quel est l'ensemble E des points M du plan tels que
$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|=2\cdot AB$$
2. Représenter cet ensemble E.

Exercice 28

Dans le triangle ABC, E est le milieu de [AB] et G est le barycentre de (A, – 2), (B, – 2), (C, 15). Démontrer que G, C, et E sont alignés.

Exercice 29

ABCD est un tétraèdre et G est le barycentre de (A, 4), (B, 1), (C, 1) et (D, 1).
On note H le centre de gravité du triangle BCD (c'est-à-dire H est l'isobarycentre de B, C, D).

1. Démontrer que G est le barycentre de (H, 3) et (A, 4).
2. Placer le point G sur la droite (AH).

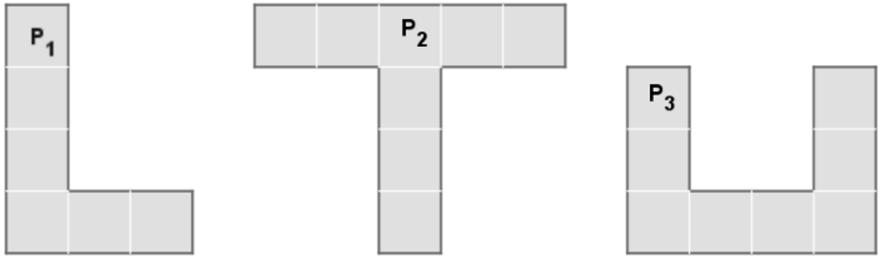
Exercice 30

Placez, sur le schéma ci-dessous, les points :

1. G, barycentre de (A,7), (B,5)
2. H, barycentre de (B,2), (A,1)
3. K, barycentre de (A,13), (B,13)
4. L, barycentre de (A,15), (B,–3)
5. P, barycentre de (G,1), (A,4)

Exercice 31

Pour chacune des plaques homogènes suivantes, construire le centre d'inertie.



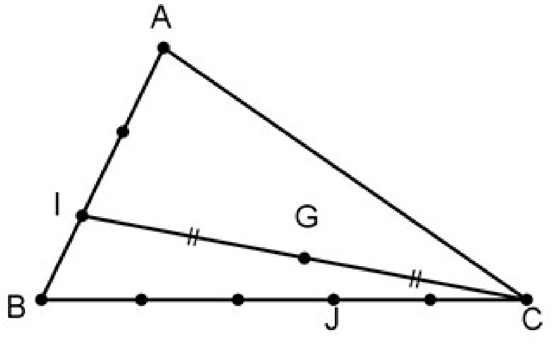
Exercice 32

Soient les points $A(1;2)$, $B(-3;-1)$ et $C(0;4)$

1. Placer les points A, B et C dans un repère orthonormé du plan
2. Construire le barycentre G du système {(A,3), (B,2), (C,1) }
3. Construire le barycentre H du système {(A,1), (B,1), (C,1) }

Exercice 33

ABC est un triangle. Les points I et J sont repérés sur la figure suivante, dont les graduations sont régulières.



1. Exprimer I comme un barycentre de A et de B, puis J comme un barycentre de B et de C.
2. On note G le barycentre de (A1), (B2), (C3). Démontrer que G est le milieu de [IC]
3. Démontrer que A, G et J sont alignés.

Exercice 34

1°) Soient, dans une base orthonormée de l'espace, $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-5\\2\end{pmatrix}$.

- **a)** Calculez $\vec{u}.\vec{v}$.
- **b)** Calculez les normes des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- **c)** Déduisez-en une mesure de l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

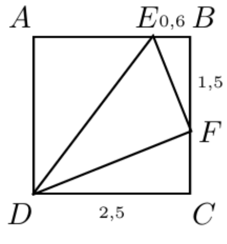
2°) Soient, dans un repère orthonormé du plan, les points $A\ (-1\,;\ 2)$, $B\ (2\,;\ 3)$, $C\ (5\,;\ -1)$ et $D\ (4\,;\ -6)$.

- **a)** Calculez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
- **b)** En utilisant le produit scalaire, cherchez une valeur approchée de l'angle $\widehat{BAD}$.
- **c)** Déterminez une valeur approchée des autres angles du quadrilatère $ABCD$.

3°) Soit E tel que $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CE} = 10$ et $\widehat{BCE} = 30°$. Calculez la longueur CE.

Exercice 35

$ABCD$ est un carré de côté 2,5. On a $EB = 0,6$ et $BF = 1,5$.
Démontrer, à l'aide du produit scalaire, que DEF est un triangle rectangle.



Exercice 36

Calculer les produits scalaires suivants :

1) $\vec{u}\cdot\vec{v}$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix}15\\-8\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}$

2) $\vec{s}\cdot\vec{t}$ avec $\vec{s}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{t}\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$

3) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ avec $\vec{a}\begin{pmatrix}\sqrt{3}-2\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix}\sqrt{3}+2\\1\end{pmatrix}$

4) $\vec{r}\cdot\overrightarrow{AB}$ avec $\vec{r}\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$, $A(-1\ ;\ 2)$ et $B(-3\ ;\ 6)$

5) $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{MR}$ avec $C(5\ ;\ 6)$, $D(-1\ ;\ 4)$, $M(3\ ;\ 7)$ et $R(8\ ;\ 9)$

6) $\overrightarrow{ST}\cdot\overrightarrow{EF}$ avec $E(0\ ;\ 1)$, $F(3\ ;\ 0)$, $S(8\ ;\ 8)$ et $T(5\ ;\ 5)$

Exercice 37

On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$.

Calculer :

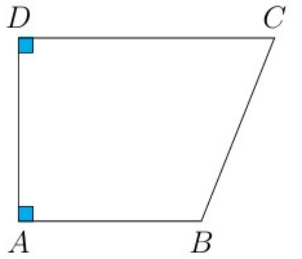
1) $\vec{u}\cdot\vec{v}$ 2) $(2\vec{u})\cdot\vec{v}$ 3) $(-\vec{u})\cdot(3\vec{v})$

Exercice 38

Soit $ABCD$ un trapèze rectangle en A et D tel que $AB = AD = 5$ et $DC = 7$.

Calculer les produits scalaires suivants :

1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$
2) $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}$
3) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$
4) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$
5) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD}$
6) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$



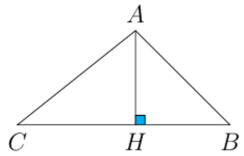
Exercice 39

Soit $ABCD$ un carré de côté 5. Calculer les produits scalaires suivants :

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}$ $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}$

Exercice 40

Soit ABC un triangle et H le pied de la hauteur issue de A. On a : $AB = 6$, $BH = 4$ et $HC = 5$.



Calculer les produits scalaires suivants :

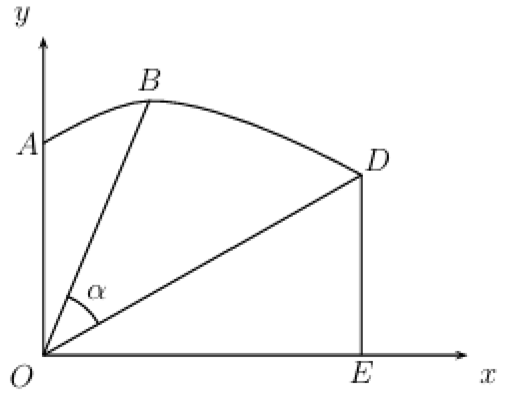
1) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$
2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$
3) $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}$
4) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$
5) $\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{CB}$
6) $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}$

Exercice 40

Un artisan doit réaliser une porte en bois
Pour consolider cette porte, il fixe deux barres métalliques OB et OD. Ce système de consolidation est efficace si l'angle α est compris entre 35° et 45°.

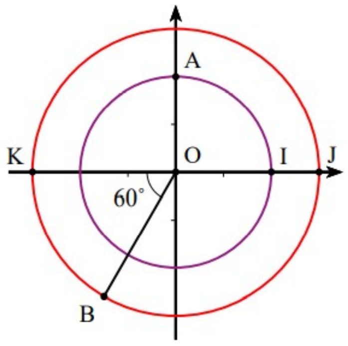
On donne $\widehat{AOE} = 90°$, $OA = 2\,\text{m}$, $OE = 3\,\text{m}$. et les coordonnées des points B et D sont $B(1;2,4)$ et $D(3;1,7)$.
On note α l'angle $\widehat{BOD}$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OD}$.
2. Calculer les longueurs OB et OD. Arrondir les résultats au centième.
3. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD}$.
4. Calculer l'angle α. Arrondir le résultat au degré.
5. Conclure sur l'efficacité de la consolidation envisagée.



Exercice 41

Sur la figure ci-contre, on a tracé deux cercles de centre O et de rayons respectifs 2 et 3.



1) Calculer les produits scalaires suivants :

a) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OJ}$ c) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OB}$

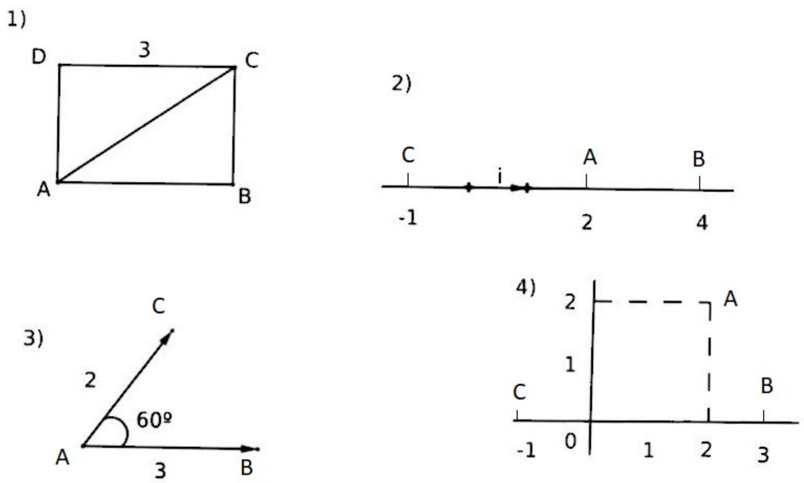
b) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OK}$ d) $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA}$

2) Prouver que dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les coordonnées de B sont $-\dfrac{3}{2}$ et $-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, puis calculer :

a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AI}$ b) $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IJ}$ c) $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{BA}$

Exercice 42

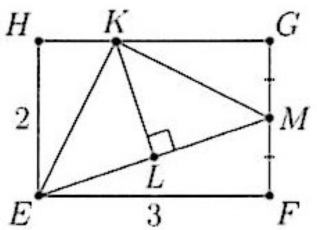
Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ pour chacun des cas suivants



Exercice 43

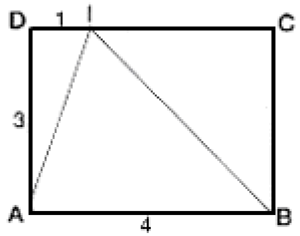
$EFGH$ est un rectangle avec $EH = 2$ et $EF = 3$. M est le milieu de $[FG]$, et K est défini par $\overrightarrow{HK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HG}$; L est le projeté orthogonal de K sur (EM).

1. Montrer que $\overrightarrow{EK}.\overrightarrow{EM} = 5$
   (décomposer chaque vecteur par la relation de Chasles).
2. En écrivant le produit scalaire $\overrightarrow{EK}.\overrightarrow{EM}$ de deux manières différentes, déterminer :
   (a) la longueur EL
   (b) une mesure de l'angle $\widehat{KEM}$ en radians



Exercice 44

ABCD est un rectangle, I est un point de [CD] défini comme l'indique la figure ci-dessous.



1. Démontrer que : $(\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DA})\cdot(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CB})=\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IC}+DA^2$
2. En déduire que : $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}=6$ et $\cos\widehat{AIB}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

Exercice 45

$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère orthonormal direct de l'espace. On considère les vecteurs

$$\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}$$

Le produit vectoriel $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est :

réponse A : $\vec{w}\begin{pmatrix}-6\\2\\4\end{pmatrix}$ réponse B : $\vec{0}$ réponse C : $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\10\\8\end{pmatrix}$

Exercice 46

$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère orthonormal direct de l'espace. On considère les vecteurs

$$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$$

La norme du produit vectoriel $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est

réponse A : $\sqrt{2}$ réponse B : $2\sqrt{2}$ réponse C : 4

Exercice 47

Dans l'espace rapporté à une repère orthonormal de sens direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et d'unité le centimètre, on considère les points

$$A(2;-2;3)\ ;\ B(4;-6;-1) \text{ et } C(0;-1;5)$$

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.
3. Déterminer la valeur approchée à 10^{-1} près de l'aire en cm^2 du triangle ABC.

Exercice 48

Dans l'espace rapporté à une repère orthonormal de sens direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et d'unité le centimètre, on considère les points

$A(4;5;0)$; $B(6;8;3)$; $C(2;7;4)$ et $D(0;4;1)$

1. **a.** Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.
   b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ et les longueurs AB et AD. En déduire la mesure en degré, à 0.1 près, de l'angle géométrique $\widehat{BAD}$.
2. **a.** Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}$.
   b. En déduire l'aire du parallélogramme $ABCD$.

Exercice 49

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de sens direct On considère les points $A(2,1,0)$, $B(-3,2,3)$ et $C(1,-2,1)$.

1. Faire une figure en perspective cavalière.
2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
3. Calculer les distances AB, AC et BC.
4. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
5. Déduire de ce qui précède une valeur approchée arrondie à 10^{-1} près de l'angle $\widehat{BAC}$.
6. **a.** Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.
   b. En déduire l'aire S du triangle ABC.
   c. Donner une valeur approchée à 10^{-1} de S.

Exercice 50

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de sens direct et d'unité graphique 1cm.
On considère les points $A(1,3,0)$ $B(3,1,0)$ $C(4,4,0)$ et $S(4,4,2)$.

1. **a.** Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
   b. Déterminer les longueurs BC et BA ainsi que la valeur approchée arrondie à l'unité de la mesure en dégré de l'angle $\widehat{BAC}$.
2. **a.** Déterminer le vecteur $\vec{N}=\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BA}$.
   b. Montrer que la droite (SC) est une hauteur de la pyramide $SABCD$.
   c. Calculer la norme du vecteur $\vec{N}$. Quelle est l'aire du parallélogramme $ABCD$?
   d. Déduire des questions précédentes le volume de la pyramide $SABCD$.

Exercice 51

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de sens direct.
On considère les points $A(0,0,1)$, $B(4,2,3)$ et $C(-3,1,1)$.

1. En utilisant le produit vectoriel :
   a. Justifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   b. Déterminer un vecteur $\vec{N}$ orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$.
2. On considère le plan (ABC) (bien défini puisque les trois points ne sont pas alignés). Soit $M(x;y;z)$ un point du plan (ABC).
   a. Que peut-on dire des vecteurs $\vec{N}$ et $\overrightarrow{AM}$?
   b. En utilisant le produit scalaire, en déduire une équation du plan (ABC).
   c. En procédant de même, déterminer une équation du plan (DEF) passant par $D(1;7;-4)$ $E(1;7;-6)$ et $F(7;-1;9)$.

Exercice 52

On considère un point O de coordonnées $O(0;0;0)$.
Dans chacun des cas suivants, déterminer le moment en A de la force $\vec{F}$ par rapport au pivot O.

1. $A(2;3;0)$ et $\vec{F}\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$.

2. $A(2;0;1)$ et $\vec{F}\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}$.

3. $A(0;4;-1)$ et $\vec{F}\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$.

Exercice 53

Calculer $\vec{u}\wedge\vec{v}$ pour les cas suivants :

1. $\vec{u}(2;-2;3)$ et $\vec{v}(2;1;-1)$
2. $\vec{u}(1;2;-1)$ et $\vec{v}(2;5;-3)$
3. $\vec{u}(3;8;-2)$ et $\vec{v}(2;1;7)$.

Exercice 54

On considère une force représentée par le vecteur $\vec{F}$; B est le point d'application de $\vec{F}$.

On appelle moment en A de $\vec{F}$ le vecteur noté $\overrightarrow{M_{A;\vec{F}}}$ défini par $\overrightarrow{M_{A;\vec{F}}} = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}$.

Les coordonnées de A, B et $\vec{F}$ sont $A(1;-2;0)$, $B(3;1;0)$ et $\vec{F}(-2,5;1,6;0)$.

1. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{M_{A;\vec{F}}}$ et $\overrightarrow{M_{O;\vec{F}}}$, O origine du repère.
2. En déduire la distance de A, à la droite $(B;\vec{F})$.

Exercice 55

Soient $\vec{u}(1,2,-3)$ et $\vec{v}(2,1,5)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. *Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?*
2. *Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils orthogonaux ?*
3. *Calculer* $\cos(\vec{u},\vec{v})$.
4. *Déterminer une mesure en radians de l'angle non orienté $(\vec{u},\vec{v})$.*
5. *Calculer l'aire du parallélogramme construit avec les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.*

Exercice 56

Soient $A(1,0)$, $B(2,3)$, $C(6,3)$ et $D(5,0)$ 4 points du plan.

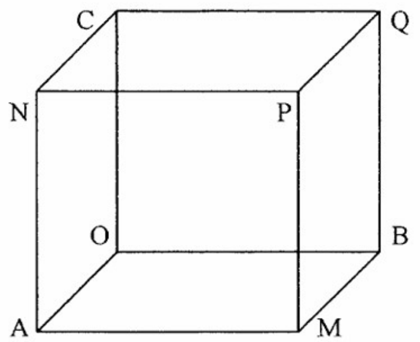
1. *Démontrer que $ABCD$ est un parallélogramme.*
2. *Calculer son aire.*

Exercice 57

Soient $\vec{u}(2,0,4)$, $\vec{v}(1,3,1)$ et $\vec{w}(2,-1,1)$. Calculer le volume du parallélépipède construit sur ces 3 vecteurs.

Exercice 58

On considère le repère orthonormal direct $(O\,;\vec{OA},\vec{OB},\vec{OC})$ sur la figure suivante :



1. a) Donner les coordonnées des points O, A, B, M, C, N, P, Q.
   b) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AP}$.
2. a) Calculer les coordonnées du produit vectoriel $\vec{u} = \vec{AB} \wedge \vec{AC}$.
   b) Calculer le produit scalaire $s = \vec{AP} \cdot \vec{u}$.
   c) On admet que le volume V du tétraèdre ABCP est $V = \frac{1}{6}s$.
   Calculer le volume V.
3. Soit I (x, y, z) le pied de la hauteur [IP] du tétraèdre ABCP.
   a) On admet que les vecteurs $\vec{IP}$ et $\vec{AB}$ sont orthogonaux. En déduire que $x = y$.
   b) On admet que les vecteurs $\vec{IP}$ et $\vec{AC}$ sont orthogonaux. En déduire que $x = z$.
   c) On admet que, le point I étant dans le plan (ABC), ses coordonnées vérifient :
   $$x + y + z = 1.$$
   Déduire des questions précédentes les coordonnées du point I.

d) Montrer que $\vec{IA}+\vec{IB}+\vec{IC}=\vec{0}$.

Que représente le point I pour le triangle ABC ?

Exercice 59

L'espace est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$

Soient les points $A(2\,;1\,;2)$, $B(2\,;0\,;1)$ et $C(1\,;1\,;-1)$

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$
2. En déduire l'aire du triangle ABC.
3. Calculer AB et AC .
4. Calculer l'angle $\widehat{BAC}$

Exercice 60

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$ de sens direct.

Déterminer un vecteur unitaire orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ (3; 1; −2) et $\vec{v}$ (2; 1; 4)

Exercice 61

Dans l'espace orienté muni d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$,

on considère les vecteurs $\vec{U}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{V}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$.

1. Déterminer la valeur de l'angle $\theta = (\vec{U}\ \vec{V})$
2. Déterminer les cosinus directeurs des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$.
3. Déterminer le vecteur $\vec{W}$ défini par $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$.
4. Déterminer $\|\vec{W}\|$ par deux méthodes différentes.
5. Déterminer $\vec{U} \cdot (\vec{V} \wedge \vec{W})$.
6. Déterminer $\vec{U} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{W})$ et $(\vec{U} \wedge \vec{V}) \wedge \vec{W}$.
7. Déterminer $(\vec{U} \cdot \vec{W})\, \vec{V} - (\vec{U} \cdot \vec{V})\, \vec{W}$.