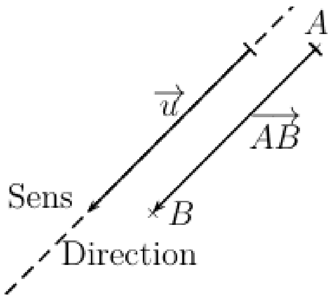
Calcul vectoriel – Fiche de cours

1. Notion de vecteur

a. Définition

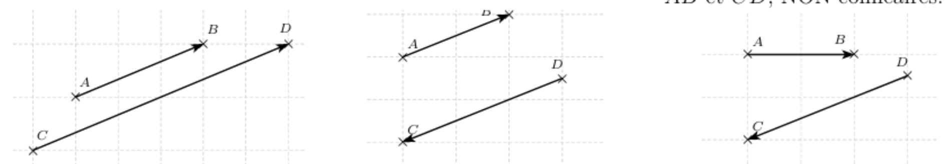
Un vecteur est l'objet géométrique qui caractérise une translation ou un glissement caractérisé par une direction, un sens et une norme



b. Colinéarité

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'ils ont même direction

Cas 1 : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, colinéaires. Cas 2 : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, colinéaires. Cas 3 : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, NON colinéaires.



c. Coordonnées du plan

On munit l'espace d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j})$

$\vec{u}(x;y) \Leftrightarrow \vec{u}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}$

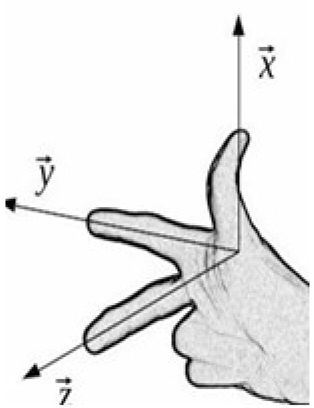
Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ 2 points du plan :

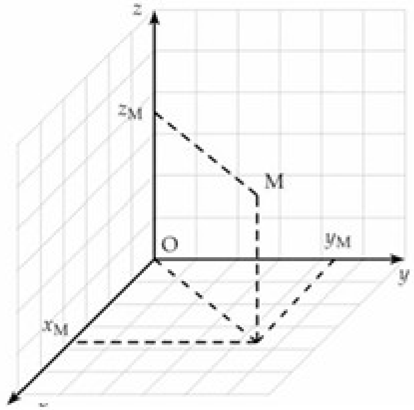
$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

d. Coordonnées dans l'espace

On munit l'espace d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

$\vec{u}(x;y;z) \Leftrightarrow \vec{u}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$





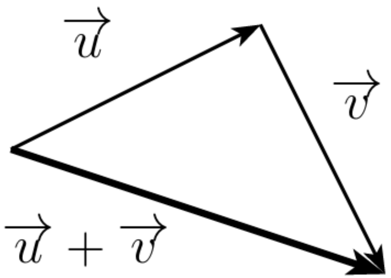
Soient $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ 2 points dans l'espace :

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

2. Opérations sur les vecteurs

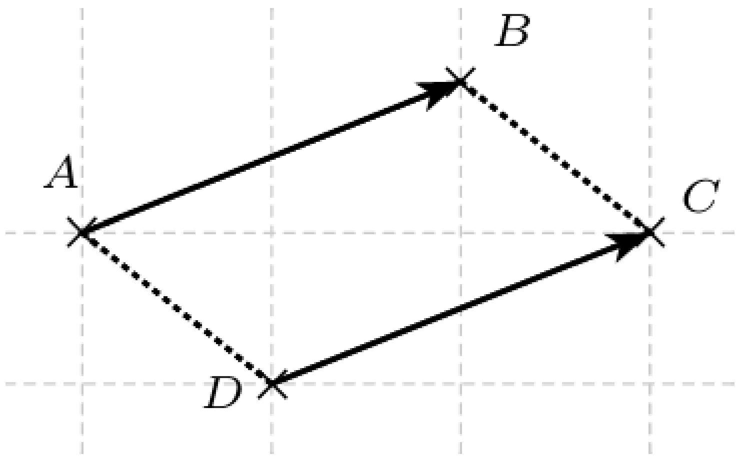
a. Somme vectorielle

La somme de 2 vecteurs s'appelle « relation de Chasles »



b. Règle du parallélogramme

Si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ alors ABCD est un parallélogramme



c. Multiplication par un réel

Si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors :

$$\vec{v}=a\cdot\vec{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a\cdot x_u \\ a\cdot y_v \\ a\cdot z_v \end{pmatrix}$$

Si $\overrightarrow{AB}=a\cdot\overrightarrow{DC}$ alors ABCD est un trapèze

3. Barycentre

a. Barycentre à 2 points

Le barycentre d'un système de 2 points pondérés {(A,a) ; (B,b)} avec $a+b\neq 0$ est le point G tel que : $a\cdot\overrightarrow{GA}+b\cdot\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

Pour tout point M du plan : $a\cdot\overrightarrow{MA}+b\cdot\overrightarrow{MB}=(a+b)\cdot\overrightarrow{MG}$

<u>Exemple</u> : G est le barycentre du système de points {(A,3) ; (B,2)}

Soient $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ 2 points du plan ; si G est barycentre de {(A,a) ; (B,b)} alors :

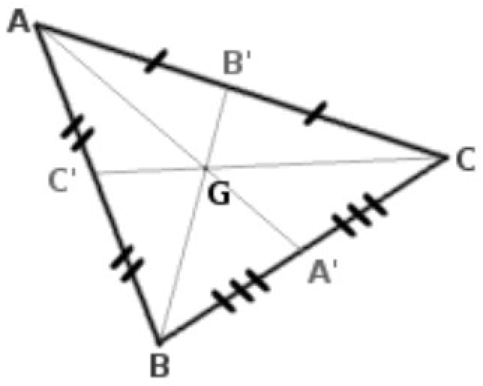
$$x_G=\frac{a\cdot x_A+b\cdot x_B}{a+b} \quad ; \quad y_G=\frac{a\cdot y_A+b\cdot y_B}{a+b}$$

b. Barycentre à 3 points

Le barycentre d'un système de 3 points pondérés {(A,a) ; (B,b) ; (C,c)} avec $a+b+c\neq 0$ est le point G tel que : $a\cdot\overrightarrow{GA}+b\cdot\overrightarrow{GB}+c\cdot\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Pour tout point M du plan : $a\cdot\overrightarrow{MA}+b\cdot\overrightarrow{MB}+c\cdot\overrightarrow{MC}=(a+b+c)\cdot\overrightarrow{MG}$

Exemple : G est le barycentre du système de points {(A,1) ; (B,1) ; (C,1)} ; G est centre de gravité du triangle ABC



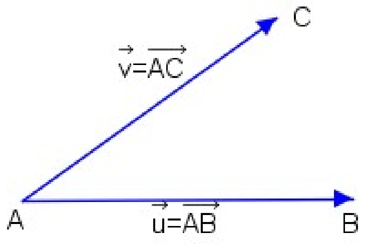
Soient $A(x_A;y_A)$ $B(x_B;y_B)$ et $C(x_C;y_C)$ 3 points du plan ; si G est barycentre de {(A,a) ; (B,b) ; (C,c)} alors :

$$x_G=\frac{a\cdot x_A+b\cdot x_B+c\cdot x_c}{a+b+c} \quad ; \quad y_G=\frac{a\cdot y_A+b\cdot y_B+c\cdot y_c}{a+b+c}$$

4. Produit scalaire

a. Définition

Le produit scalaire de deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel suivant : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})$

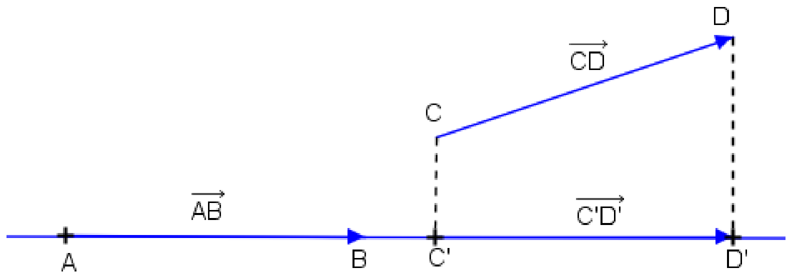


b. Autres expressions du produit scalaire

- projeté orthogonal

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont deux vecteurs, C et D se projettent orthogonalement en C′ et D′ sur la droite (AB). On a alors :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}=\overline{AB}\cdot\overline{C'D'}$$



- définition analytique

Si dans un repère orthonormal, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives (x,y,y) et (x′,y′,z′) alors : $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$

c. Propriétés de bilinéarité

- symétrie : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
- bilinéarité : pour tous réels a et b

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w} \qquad \text{et} \qquad (a\cdot\vec{u})\cdot(b\cdot\vec{v})=a\cdot b\times\vec{u}\cdot\vec{v}$$

d. Critère d'orthogonalité

$$\begin{cases}\vec{u}\neq\vec{0} \text{ et } \vec{v}\neq\vec{0}\\ \vec{u}\cdot\vec{v}=0\end{cases} \Leftrightarrow \vec{u}\, et\, \vec{v} \text{ orthogonaux}$$

5. Produit vectoriel

a. Définition

Le produit vectoriel de deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un vecteur $\vec{w}$:

- direction tel que $\vec{w} \perp \vec{u}$ et $\vec{w} \perp \vec{v}$
- sens tel que $(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w})$ soit direct
- norme $\|\vec{w}\| = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\sin(\vec{u}\,;\vec{v})|$

b. Coordonnées

$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$

c. Propriétés

- $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$
- $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w}$
- $a(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) = (a\overrightarrow{u}) \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \wedge (a\overrightarrow{v})$
- $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ colinéaires.