

Statistiques à 2 variables – Exercices – Devoirs

Exercice 1

Evolution de l'indice IMVP

L'indice IMVP (International Motor Vehicle Program) est un indicateur de référence élaboré par le Massachusetts Institute of Technology qui mesure, en heures, le temps de montage moyen d'un véhicule.

Dans une entreprise de construction automobile, on a obtenu le tableau suivant :

Année	Rang de l'année x_i	Temps en heures y_i
1995	5	26,2
1996	6	23,7
1997	7	21,4
1998	8	18,5
1999	9	16,8
2000	10	15,4
2001	11	14,6

PARTIE A

1. Représenter le nuage de points M_i associé à la série statistique (x_i, y_i) dans un plan rapporté à un repère orthonormal
2. Calculer les coordonnées du point moyen et le placer sur le graphique.
3. Déterminer $\text{var}(X)$, $\text{var}(Y)$ $\text{cov}(X,Y)$; en déduire la valeur du coefficient de corrélation ; un ajustement affine semble-t-il justifié ? Donner une équation de la droite D d'ajustement affine de y en x , obtenue par la méthodes des moindres carrés.
4. En déduire par le calcul, les prévisions du temps de montage moyen pour l'année 2005, puis l'année 2007, en supposant que le modèle reste valable jusqu'en 2007.

PARTIE B

On décide d'approcher ce nuage par un arc de parabole ; pour cela on pose $z = \sqrt{y}$.

1. On suppose qu'un ajustement affine de z en x est justifié.
Donner le tableau des valeurs (x_i, z_i) . Les valeurs z_i seront arrondies au centième.
2. Calculer les coordonnées du point moyen et le placer sur le graphique.
3. Déterminer $\text{var}(Z)$ $\text{cov}(X,Z)$; en déduire la valeur du coefficient de corrélation ; un ajustement affine semble-t-il justifié ? Donner une équation de la droite D d'ajustement affine de z en x , obtenue par la méthodes des moindres carrés.
4. En déduire l'expression de y en fonction de x , puis les temps de montage en 2005 et en 2007 arrondis au dixième.

Le tableau suivant donne les résultats obtenus à partir de 10 essais de laboratoire concernant la charge de rupture d'un acier en fonction de sa teneur en carbone.

Exercice 2

Le tableau suivant donne les résultats obtenus à partir de 10 essais de laboratoire concernant la charge de rupture d'un acier en fonction de sa teneur en carbone.

Teneur en carbone x_i	70	60	68	64	66	64	62	70	74	62
Charge de rupture y_i (en kg)	87	71	79	74	79	80	75	86	95	70

1. Représenter graphiquement le nuage de points de coordonnées (x_i, y_i) .
On prendra en abscisse 1 cm pour une unité en représentant les abscisses à partir de la valeur 60. On prendra en ordonnées 1 cm pour 2 kg, en représentant les ordonnées à partir de 70.

2. Calculer les coordonnées du point moyen de ce nuage.
 3. Déterminer la valeur approchée à 10^{-3} près du coefficient de corrélation linéaire de la série statistique de variables x et y . Interpréter le résultat.
 4. Déterminer une équation de la forme $y = ax + b$ de la droite D de régression de y en x par la méthode des moindres carrés
- On donnera les valeurs approchées des coefficients a et b à 10^{-3} près. Tracer la droite D sur le graphique du 1).
5. Un acier a une teneur en carbone de 77. Donner une estimation de sa charge de rupture.

Exercice 3

Le tableau suivant indique le prix de vente en francs d'une machine et le nombre d'exemplaires vendus les quatre dernières années.

Rang de l'année	1	2	3	4
Prix de vente x_i (en francs)	2 000	1 400	1 800	2 500
Nombre y_i d'exemplaires vendus	198	240	222	160

1. Représenter le nuage des points M_i de coordonnées (x_i, y_i) dans le plan muni d'un repère orthogonal. On prendra pour origine du repère le point de coordonnées (1 400, 160), pour unité, 1 cm pour 100 F sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 10 unités sur l'axe des ordonnées. Vérifier qu'un ajustement affine paraît justifié.
2. Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage. Le placer sur la figure.
- 3a. Déterminer une équation de la droite D de régression de y en x par la méthode des moindres carrés. Les coefficients seront déterminés à 10^{-3} près.
- 3b. Construire cette droite de régression sur le graphique du 1.
4. En quelle année a-t-on eu le chiffre d'affaires le plus élevé ? Quel est ce chiffre d'affaires ?
5. On suppose maintenant que, chaque année, le nombre d'exemplaires vendus y et le prix de vente x suivent la relation : $y = -0,08x + 349$. On note $S(x)$ le chiffre d'affaires réalisé en vendant y machines valant chacune x francs.

- a. Exprimer $S(x)$ en fonction de x .
- b. Étudier les variations de la fonction $S(x)$ définie sur $[1\ 400, 2\ 500]$
- c. En déduire le prix de vente d'une machine l'année de rang 5 si l'on veut que la somme encaissée $S(x)$ soit maximale. Quel sera le nombre d'exemplaires vendus, à une unité près ? Quelle sera alors la somme encaissée ?

Exercice 4

La consommation d'une voiture, z , est donnée en fonction de sa vitesse, x , par le tableau suivant :

x (en km/h)	80	90	100	110	120
z (en litres/ 100 km)	4	5	6,5	8	10

1. La consommation est-elle proportionnelle à la vitesse ? Justifier rapidement votre réponse.
2. Compléter le tableau ci-dessus, après l'avoir reproduit, par une ligne : $y = \ln z$ dont on donnera les valeurs approchées à 6 décimales (les meilleures possibles).
3. Dans un repère d'origine O ($x_0 = 70$; $y_0 = 1,30$ en prenant comme unités 1 cm pour 10 km/h en abscisse et 1 cm pour 0,10 en ordonnée, représenter le nuage de 5 points $(x, y = \ln z)$.
4. Indiquer l'équation d'une droite d'ajustement pour les cinq points de coordonnées (x, y) du nuage, par la méthode des moindres carrés. Donner cette équation sous la forme $y = Ax + B$, avec les valeurs approchées de A et B (les meilleures possibles) à 3 décimales obtenues à la calculatrice programmable.
5. Estimer y pour une vitesse de 140 km/h. Estimer la consommation aux 100 km pour cette vitesse de 140 km/h, à 0,5 L près comme dans le tableau initialement donné.

Exercice 5

Au cours d'une expérience de physique, on a mesuré les variations de l'intensité I d'un courant, en milliampères, dans un circuit quand on a augmenté la tension U , en volts, aux bornes d'une lampe. Les résultats de cette étude expérimentale figurent dans le tableau suivant

Intensité (en mA) : I	36	51	81	100	132	155	175	200	222	250
Tension (en volts) : U	0,1	0,2	0,5	0,8	1,5	2	2,5	3	4	5

- Représenter dans un repère orthogonal le nuage de points de coordonnées (I, U) associé à cette série statistique double.
- On se propose de réaliser un ajustement du nuage précédent par une courbe d'équation de la forme $U = k \cdot I^\alpha$
 - On pose $x = \ln I$ et $y = \ln U$. Dresser le tableau des valeurs prises par les deux variables x et y . On fera figurer les valeurs approchées à 10^{-2} près.
 - Représenter dans un second repère orthogonal le nuage de points de coordonnées (x, y) .
 - Déterminer la valeur approchée à 10^{-3} près du coefficient de corrélation linéaire r de la série statistique de variables x et y . Peut-on envisager un ajustement affine de ce second nuage ?
 - Déterminer une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés. On donnera des valeurs approchées à 10^{-2} près des coefficients. Tracer cette droite dans le second repère.
 - Déduire du d) une expression de U en fonction de I de la forme $U = k \cdot I^\alpha$
 - Quelle valeur peut-on prévoir pour la tension pour une intensité de 270 mA ? (On donnera le résultat à 10^{-1} près.)

Exercice 6

Une chaîne de magasins commercialise des lampes de salon, elle souhaite étudier l'évolution du nombre de lampes vendues en fonction du nombre de magasins dans lesquels la lampe est proposée. Le tableau suivant présente cette évolution.

Nombre de magasins x_i	15	40	70	90	100	150
Nombre de lampes vendues y_i	60	254	362	504	615	810

On décide d'ajuster cette série statistique à deux variables par la méthode des moindres carrés.

- Déterminer à l'aide de la calculatrice le coefficient de corrélation de cette série. Est-on dans des conditions satisfaisantes pour réaliser un ajustement affine ?
- Déterminer à la calculatrice une équation de la droite de régression de y en x sous la forme $y = mx + p$, avec m et p arrondis à 10^{-2} .
- En déduire une estimation du nombre de lampes vendues, si la chaîne présente celles-ci dans 400 magasins.