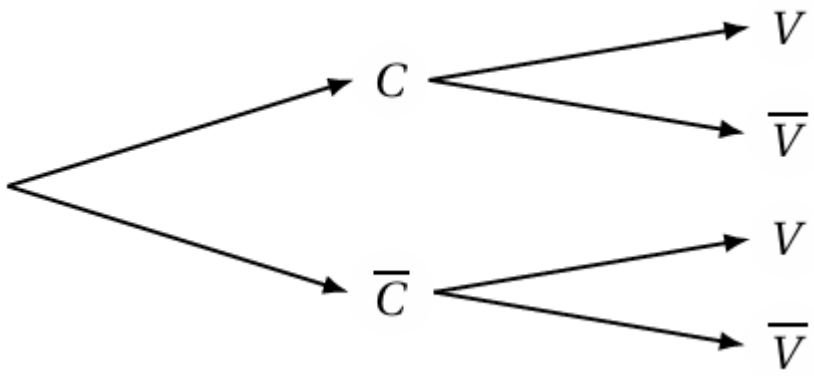
Probabilités conditionnelles – Exercices – Devoirs

Exercice 1

Les réponses seront arrondies à 10^{-4} près.
Durant la saison hivernale, la circulation d'un virus a entraîné la contamination de 2% de la population d'un pays. Dans ce pays, 90% de la population a été vaccinée contre ce virus. On constate que 62% des personnes contaminées avaient été vaccinées. On interroge au hasard une personne, et on note les évènements suivants :
C :«la personne a été contaminée» V :«la personne a été vaccinée»
Les évènements contraires des évènements C et V sont notés respectivement $\overline{C}$ et $\overline{V}$.
1. À partir de l'énoncé, donner, sans calcul, les probabilités P(C), P(V) et la probabilité conditionnelle $P_C(V)$.
2a. Calculer $P(C \cap V)$.
2b. En déduire $P(\overline{C} \cap V)$.
3. Recopier l'arbre des probabilités ci-dessous et le compléter.



4. Calculer $P_V(C)$ et interpréter le résultat
5. Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant votre réponse.
a. «Parmi les personnes non contaminées, il y a dix fois plus de personnes vaccinées que de personnes non vaccinées.»
b. «Plus de 98% de la population vaccinée n'a pas été contaminée.»

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, indiquer si les événements A et B sont indépendants.
1. $p(A)=0,7$; $p(B)=0,5$ et $p(A \cup B)=0,8$.
2. $p(A)=0,7$; $p(B)=0,4$ et $p(A \cup B)=0,82$.
3. $p(A)=0,4$; $p(B)=0,5$ et $p(A \cap B)=0,2$

Exercice 3

Chaque matin, Stéphane peut être victime de deux événements indépendants:
• R:«Il n'entend pas son réveil sonner». • S :«Son scooter est en panne».
Il a observé que chaque jour de classe, la probabilité de R est égale à 0,1 et que celle de S est égale à 0,05.
1. Calculer la probabilité qu'un jour de classe donné, Stéphane entende son réveil sonner et que le scooter tombe en panne.
2. Calculer la probabilité que Stéphane soit à l'heure au lycée un jour de classe

Exercice 4

Pour accéder au réseau privé d'une entreprise depuis l'extérieur, les connexions des employés transitent aléatoirement via trois serveurs distants différents, notés A, B et C. Ces serveurs ont des caractéristiques techniques différentes et les connexions se répartissent de la manière suivante :

- 25% des connexions transitent via le serveur A
- 15% des connexions transitent via le serveur B
- le reste des connexions s'effectue via le serveur C.

Les connexions à distance sont parfois instables et, lors du fonctionnement normal des serveurs, les utilisateurs peuvent subir des déconnexions pour différentes raisons (saturation des serveurs, débit internet insuffisant, attaques malveillantes, mises à jour de logiciels, etc.). On dira qu'une connexion est stable si l'utilisateur ne subit pas de déconnexion après son identification aux serveurs. L'équipe de maintenance informatique a observé statistiquement que, dans le cadre d'un fonctionnement habituel des serveurs:

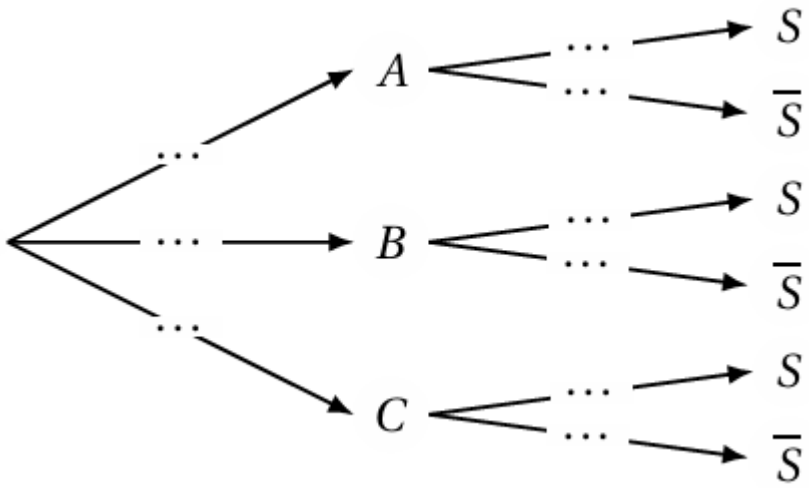
- 90% des connexions via le serveur A sont stables
- 80% des connexions via le serveur B sont stables
- 85% des connexions via le serveur C sont stables

On s'intéresse au hasard à l'état d'une connexion effectuée par un employé de l'entre prise. On considère les évènements suivants :

- A :«La connexion s'est effectuée via le serveur A»
- B :«La connexion s'est effectuée via le serveur B»
- C :«La connexion s'est effectuée via le serveur C»
- S :«La connexion est stable»

On note $\overline{S}$ l'évènement contraire de l'évènement S

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous modélisant la situation de l'énoncé.



2. Démontrer que la probabilité que la connexion soit stable et passe par le serveur B est égale à 0,12.
3. Calculer la probabilité $P(C \cap S)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Démontrer que la probabilité de l'évènement S est P(S)=0,855.
5. On suppose désormais que la connexion est stable. Calculer la probabilité que la connexion ait eu lieu depuis le serveur B.

On donnera la valeur arrondie au millième

Exercice 5

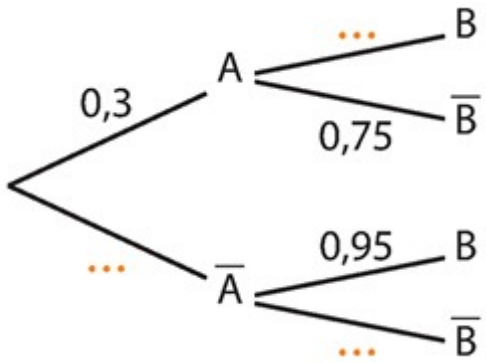
Un professeur de Mathématiques a trié sa bibliothèque dans laquelle figurent 32 manuels de différents niveaux, certains étant conformes aux programmes actuels et d'autres, plus vieux, n'y étant pas conformes.
La répartition de ces manuels est donnée par le tableau suivant :

	Conforme	Non conforme	Total
Seconde	9	8	17
Première	3	5	8
Terminale	1	6	7
Total	13	19	32

Il prend un de ces manuels au hasard et on considère les événements :
C : « Le manuel est conforme aux programmes actuels. »
S : « Le manuel est un manuel de Seconde. »
T : « Le manuel est un manuel de Terminale. »
1. Calculer $P(C)$,$P(S)$ et $P(T)$.
2. Calculer $P_T(C)$ et $P_C(T)$.
3. Calculer $P_C(\overline{S})$ et $P_{\overline{S}}(C)$.

Exercice 6

1. Pour deux événements A et B, recopier et compléter l'arbre ci-contre puis calculer $P(A\cap B)$, $P(\overline{A}\cap B)$, $P(A\cap\overline{B})$, $P(\overline{A}\cap\overline{B})$, $P(B)$ et $P(\overline{B})$.



2. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 7

Des études statistiques ont prouvé que 4% de la population d'un pays est intolérante au gluten. Pour cette maladie, un laboratoire pharmaceutique élabore un nouveau test de dépistage. Les essais sur un groupe témoin de 1000 individus ont donné les résultats résumés dans le tableau d'effectifs ci-après.
- 4% des individus du groupe témoin sont atteints par la maladie
- 85% des personnes atteintes par la maladie réagissent positivement au test.

1. Recopier et compléter le tableau d'effectifs ci-dessous.

	Test positif	Test négatif	Total
Malade			40
Non malade		950	960
Total			1 000

On choisit au hasard un individu dans le groupe témoin ; on admet que chaque individu a la même probabilité d'être choisi. On note les évènements suivants :
- M:«L'individu choisi est atteint par la maladie».
- T:«L'individu choisi réagit positivement au test».

2. Déterminer la probabilité de l'événement M.
3a. Déterminer la probabilité qu'un individu réagisse positivement au test sachant qu'il est atteint par la maladie.
3b. Définir par une phrase l'événement «M∩T» puis calculer sa probabilité.
3c. Déterminer la probabilité de l'événement T.
4. Certains organismes de santé autorisent la commercialisation d'un test de dépistage lorsque la probabilité de ne pas être atteint par la maladie, sachant que la réaction au test est positive, est inférieure à 20 %.
4a. Le laboratoire pharmaceutique peut-il espérer, selon ce critère, une commercialisation de son test?
4b. Proposer un critère qui permettrait sa commercialisation.

Exercice 8

On compte quatre groupes sanguins dans l'espèce humaine : A, B, AB et O. Chaque groupe sanguin peut présenter un facteur rhésus. Lorsqu'il est présent, on dit que le rhésus est positif, sinon on dit qu'il est négatif. Au sein de la population française, on sait que :

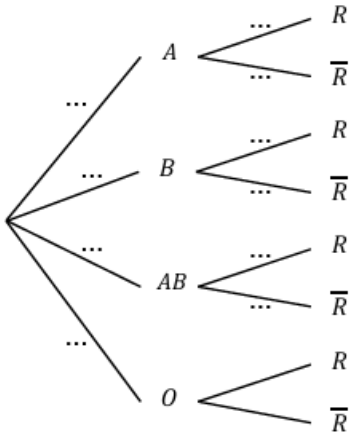
- 45 % des individus appartiennent au groupe A, et parmi eux 85 % sont de rhésus positif
- 10 % des individus appartiennent au groupe B, et parmi eux 84 % sont de rhésus positif
- 3 % des individus appartiennent au groupe AB, et parmi eux 82 % sont de rhésus positif. On choisit au hasard une personne dans la population française.

On désigne par :

- A l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin A »
- B l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin B »
- AB l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin AB »
- O l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin O »
- R l'évènement « La personne choisie a un facteur rhésus positif ».

Pour un événement quelconque E, on note $\overline{E}$ l'événement contraire de E et $P(E)$ la probabilité de E.

1. Compléter l'arbre de probabilité suivant.



2. Montrer que $P(B \cap R) = 0{,}084$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. On précise que $P(R) = 0{,}8397$. Montrer que $PO(R) = 0{,}83$.
4. On dit qu'un individu est « donneur universel » lorsque son sang peut être transfusé à toute personne sans risque d'incompatibilité. Le groupe O de rhésus négatif est le seul vérifiant cette caractéristique. Montrer que la probabilité qu'un individu choisi au hasard dans la population française soit donneur universel est de 0,0714.