

# Géométrie repérée – Exercices – Devoirs

## Exercice 1 corrigé disponible

Soient  $A(1;2)$   $B(5;1)$   $C(-4;5)$  et  $D(4;3)$

1. Déterminer une équation de la droite  $\Delta_1$  de vecteur directeur  $\overrightarrow{AB}$  et passant par C
2. Déterminer une équation de la droite  $\Delta_2$  perpendiculaire à  $\Delta_1$  passant par D

## Exercice 2 corrigé disponible

Soit la droite  $\Delta$  passant par  $A(5;0)$  et de vecteur normal  $\vec{n}(-3;5)$

1. Déterminer une équation cartésienne de  $\Delta$
2. Déterminer une équation de la droite  $\Delta'$  perpendiculaire à  $\Delta$  et passant par A

## Exercice 3 corrigé disponible

Soit  $\Delta$  une droite de vecteur directeur  $\vec{u}(1;3)$

1. Justifier que le vecteur  $\vec{n}(3;-1)$  est un vecteur normal à  $\Delta$
2. Donner les coordonnées de deux autres vecteurs normaux à  $\Delta$

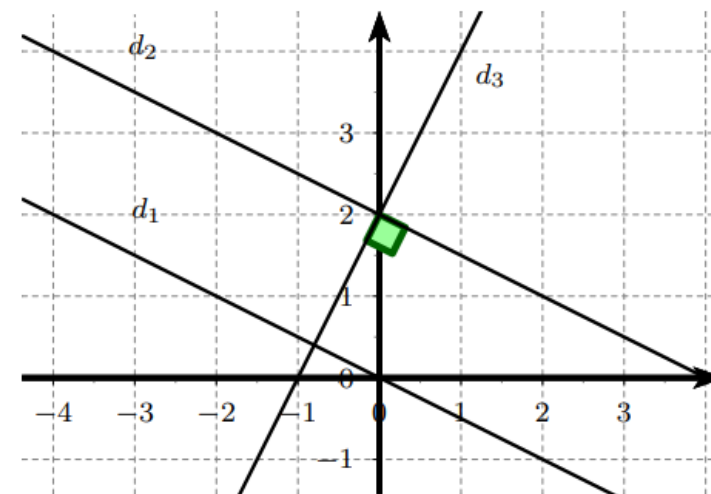
## Exercice 4 corrigé disponible

Déterminer une équation cartésienne de la droite  $\Delta$  dont un vecteur normal est  $\vec{n}(8;-5)$  et passant par  $A(3;5)$

## Exercice 5 corrigé disponible

Associer à chaque droite représentée ci-contre son équation.

- $E_1 : x + 2y - 4 = 0$
- $E_2 : x + 2y = 0$
- $E_3 : 2x - y + 2 = 0$



Pour chaque droite, indiquer les coordonnées d'un vecteur directeur et d'un vecteur normal

## Exercice 6 corrigé disponible

Soit  $d$  la droite d'équation cartésienne  $d : 2x - 2y - 3 = 0$  et  $A(2;3)$  un point du plan.

- ① Trouver un vecteur normal et un vecteur directeur de  $d$ .
- ② Trouver une équation de la droite  $\Delta$  passant par  $A$  et perpendiculaire à  $d$ .

### Exercice 7 corrigé disponible

On considère la droite  $d$  d'équation  $2x + y + 5 = 0$  et  $H$  est le projeté orthogonal de  $M(3; -6)$  sur  $d$ . Déterminer les coordonnées du point  $H$ .

### Exercice 8 corrigé disponible

On considère  $A(-2; 4)$  et  $B(1; 2)$ . Le point  $M$  est un point qui se projette orthogonalement sur  $(AB)$  en  $B$ . Montrer que  $M$  peut avoir pour coordonnées  $(-1; -1)$ .

### Exercice 9 corrigé disponible

Dans un repère orthonormal, le cercle  $C$  a pour équation :  $x^2 + y^2 - 6x - 5y + 2 = 0$ . Déterminer son centre et son rayon.

### Exercice 10 corrigé disponible

Dans un repère orthonormé, on donne les points :

$A(1; -2)$ ,  $B(4; 3)$  et  $C(-2; 1)$ .

- ① Déterminer une équation cartésienne de la hauteur issue de  $A$  dans le triangle  $ABC$ .
- ② Déterminer une équation cartésienne de la hauteur issue de  $B$  dans le triangle  $ABC$ .
- ③ Calculer les coordonnées de l'orthocentre  $H$  du triangle  $ABC$ .

### Exercice 11 corrigé disponible

Dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , on considère les points  $A(3; 1)$ ,  $B(-3; 3)$  et  $C(2; 4)$ .

1. Montrer que l'équation  $x + 3y - 6 = 0$  est une équation cartésienne de la droite  $(AB)$ .
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite  $d$ , perpendiculaire à la droite  $(AB)$  et passant par le point  $C$ .
3. En déduire les coordonnées du point  $K$ , projeté orthogonal du point  $C$  sur la droite  $(AB)$ .
4. Calculer la distance  $AB$  et déterminer les coordonnées du milieu  $M$  du segment  $[AB]$ .
5. En déduire une équation du cercle de diamètre  $[AB]$ .

### Exercice 12 corrigé disponible

Dans un repère orthonormé du plan, on donne la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $2x - 5y + 3 = 0$ .

1. Déterminer un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$ .
2. Déterminer une équation de la droite  $\Delta$  perpendiculaire à  $\mathcal{D}$  passant par le point  $A(-1; 6)$ .
3. Déterminer une équation du cercle  $\mathcal{C}$  de diamètre  $[AB]$  avec  $B(1; 1)$ .
4. Justifier que  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  sont tangents.

### Exercice 13 corrigé disponible

On complètera la figure au fur et à mesure.

1. Montrer que  $\mathcal{E}$  est le cercle d'équation  $x^2 + y^2 - 6x - 6y - 7 = 0$ ; préciser son centre et son rayon.
2. On considère le cercle  $\mathcal{C}$  d'équation  $x^2 + y^2 + 4x - y - 2 = 0$ ; déterminer son centre et son rayon.
3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{C}$ ; on notera  $I$  celui dont l'ordonnée est la plus grande, et  $J$  l'autre point.
4. (a) Déterminer une équation de la tangente à  $\mathcal{E}$  en  $J$ ; on note  $T_J$  cette droite.  
(b) Déterminer une équation de la tangente à  $\mathcal{C}$  en  $J$ ; on note  $T'_J$  cette droite.  
(c) Montrer que ces deux droites sont perpendiculaires (*On dit que les cercles sont orthogonaux*).

### Exercice 14

Dans un repère orthonormé du plan, on considère les points  $A(3; -1)$ ,  $B(2; -4)$  et  $C(-2; 1)$ .

1. Déterminer une équation de la droite  $(d_1)$ , médiatrice de  $[AB]$ , et vérifier que  $D(-2, -1)$  appartient à  $(d_1)$ .
2. Déterminer une équation de la droite  $(d_2)$ , hauteur issue de  $A$  dans le triangle  $ABC$ , et vérifier que  $E(-2, -5)$  appartient à  $(d_2)$ .
3. On admet que  $(d_1)$  et  $(d_2)$  sont sécantes; calculer les coordonnées de leur point d'intersection, noté  $F$ .
4. Calculer, au dixième de degré près, une mesure de l'angle aigu formé par les droites  $(d_1)$  et  $(d_2)$ .

### Exercice 15

Dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , on considère le triangle  $OAB$  avec  $A(4; 0)$  et  $B(1; 1)$ .

1. Déterminer une équation du cercle  $\mathcal{C}$  circonscrit au triangle  $OAB$ .  
(écrire les équations de deux médiatrices...)
2. Calculer les coordonnées du point  $A' (\neq O)$ , intersection du cercle avec l'axe des ordonnées.
3. Montrer que les tangentes au cercle en  $A$  et  $A'$  sont parallèles.
4. Faire une figure.

## Exercice 16

On donne les points  $A(-2; 0)$ ,  $B(4; 3)$  et  $C(2; -3)$  dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Déterminer les équations des hauteurs issues de  $A$  et  $B$ .
2. En déduire les coordonnées de l'orthocentre  $H$  du triangle  $ABC$ .

## Exercice 17

Dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , on considère les points  $A(6; 0)$  et  $B(8; 4)$ .

1. Montrer que l'équation  $x^2 - 6x + y^2 - 8y = 0$  est celle du cercle  $\mathcal{C}$  circonscrit au triangle  $OAB$ ; déterminer son centre  $I$  et son rayon.
2. Soit  $\Delta$  la droite d'équation  $x - y + 6 = 0$ ; calculer les coordonnées des points d'intersection entre la droite  $\Delta$  et le cercle  $\mathcal{C}$ .
3. Déterminer une équation de la tangente au cercle  $\mathcal{C}$  au point  $D(6; 8)$ .

## Exercice 18

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite  $\Delta$  perpendiculaire à la droite  $\mathcal{D} : 2x + y + 3 = 0$  passant par  $A(-4; 5)$ .
2. Déterminer une équation du cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $I(-2; 3)$  et de rayon 3.
3. Déterminer une équation du cercle  $\mathcal{C}'$  de diamètre  $[AB]$  avec  $A(\frac{2}{3}; -2)$  et  $B(3; \frac{5}{3})$ .

## Exercice 19

Dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  du plan, on donne les points  $A(2; 1)$  et  $B(-1; 4)$ .

Pour tout point  $M(x; y)$ , on pose  $h(M) = 2MA^2 + MB^2$ .

1. Vérifier que  $h(M) = 3(x^2 + y^2 - 2x - 4y + 9)$ .
2. On note  $\mathcal{E}_k$  l'ensemble des points  $M$  tels que  $h(M) = k$  où  $k$  est un réel donné.
  - a) Montrer que  $\mathcal{E}_9$  est l'ensemble vide.
  - b) Montrer que  $\mathcal{E}_{27}$  est le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $E(1; 2)$  de rayon  $\sqrt{5}$ , puis le tracer.
3. Déterminer une équation du cercle  $\mathcal{C}'$  de centre  $F(-4; 2)$  de rayon  $\sqrt{10}$ ; tracer  $\mathcal{C}'$ .
4. Déterminer les coordonnées des points  $I$  et  $J$  intersections des cercles  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$ .

## Exercice 20

Soient  $A$  et  $B$  deux points du plan tels que  $AB = 5$ .

On cherche à déterminer l'ensemble  $\mathcal{E}$  des points  $M$  du plan tels que  $MA^2 - MB^2 = 10$ .

1. On note  $I$  le milieu de  $[AB]$ ; démontrer que  $M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM} = 5$ .
2. Soit  $H$  le projeté orthogonal du point  $M$  sur  $(AB)$ ; montrer que  $M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow IH = 1$ .  
En déduire la nature de l'ensemble  $\mathcal{E}$ .

## Exercice 21

1. Soient deux points  $A$  et  $B$  avec  $AB = 6$ , et soit  $I$  le milieu de  $[AB]$ .  
Déterminer l'ensemble  $\mathcal{C}$  des points  $M$  du plan tels que :  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 16$ 
  - (a) Montrer que  $M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow MI^2 = 25$ .  
(on pourra décomposer  $\overrightarrow{MA}$  et  $\overrightarrow{MB}$  en introduisant le point  $I$ ).
  - (b) Déterminer alors précisément l'ensemble  $\mathcal{C}$ .
2. On donne  $A(-1; 2)$ ,  $B(2; -2)$  et  $C(-2; -1)$  dans un repère orthonormé.  
En utilisant les coordonnées des vecteurs, déterminer précisément l'ensemble  $\mathcal{D}$  des points  $M$  du plan tels que :  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 3$

## Exercice 22

Dans un repère orthonormal, les cercles  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont définis respectivement par les équations :

$$x^2 - 4x + y^2 + 2y = 15 \text{ et } (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 10$$

Déterminer les coordonnées des points d'intersection de  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ .

## Exercice 23

Le plan est rapporté à un repère orthonormé qu'on pourra représenter et compléter au fur et à mesure de l'exercice (non exigé).

1. Montrer que l'ensemble des points  $M(x; y)$  dont les coordonnées vérifient l'équation

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 5 = 0$$

est un cercle  $\mathcal{C}$  dont on précisera le centre  $I$  et le rayon.

2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection du cercle  $\mathcal{C}$  et des axes de coordonnées du repère.  
On notera  $A$  et  $B$  les points d'intersection de  $\mathcal{C}$  et de l'axe  $(Oy)$ ,  $A$  étant celui avec la plus petite ordonnée.
3. Déterminer une équation cartésienne de la tangente  $T$  au cercle  $\mathcal{C}$  en  $A$ .

## Exercice 24

Soit  $d$  est la droite d'équation :  $5x + 2y + 5 = 0$ .

- 1) Trouver un vecteur directeur  $\vec{u}$  à  $d$ .
- 2) Trouver un vecteur normal  $\vec{n}$  à  $d$ .
- 3) Trouver une équation de la droite  $\Delta$  passant par  $A(-2; 3)$  et perpendiculaire à  $d$ .
- 4) Trouver une équation de la droite  $\Delta'$  passant par  $B(7; 1)$  et parallèle à  $d$ .



## Exercice 25 corrigé disponible

En optique, la loi de réflexion exprime que le rayon réfléchi par une surface est le symétrique du rayon incident par rapport à la normale à la surface au point d'impact; la normale à une surface en un point étant la perpendiculaire au plan tangent en ce point.

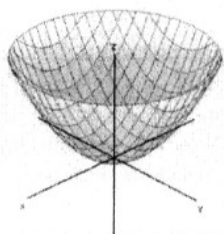
Ce principe est dû aux Lois de Snell-Descartes

Je vous invite à cliquer sur ce lien pour en savoir plus.

### Première partie: Visualisation et conjecture

À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique :

- représenter la courbe  $P$  et un point mobile  $M$  sur  $P$  ;
- tracer la tangente  $T$  au point  $M$  puis la normale  $N$  à  $P$  en  $M$  ;
- construire un rayon incident  $(IM)$  parallèle à l'axe de symétrie de  $P$  ayant pour impact  $M$ , puis construire son rayon réfléchi  $(MR)$  ;
- conjecturer une propriété des rayons réfléchis.



Comme parabole, on prendra la plus simple: celle, dans le plan, d'équation  $y = x^2$ . Vous pouvez également faire un dessin à la main si vous préférez.

Remarque: si vous avez regardé la vidéo, dans notre cas, les indices  $n_1$  et  $n_2$  sont identiques: c'est le même milieu. L'angle d'incidence et l'angle de réflexion sont donc.....

### Deuxième partie: Etude numérique d'un cas particulier.

Soit la parabole d'équation  $f(x) = x^2$ . On considère le point  $M$  de cette parabole d'abscisse 1. On modélise le rayon incident, arrivant sur le point  $M$ , par la droite d'équation  $x = 1$ . (parallèle à l'axe des ordonnées).

1. Donner l'équation de la tangente  $(T)$  à cette parabole au point  $M$ .

2. Montrer que l'équation de la droite normale  $(N)$  à  $M$  a pour équation  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ .

Remarques:

- ★ La normale est donc la droite passant par  $M$  et perpendiculaire à la tangente  $(T)$
- ★ Deux droites d'équations respectives  $y = mx + p$  et  $y = m'x + p'$  sont perpendiculaires si et seulement si  $m \times m' = -1$ .

3. Soit à présent un point  $A$  de coordonnées  $(1;2)$  (qui est donc sur le rayon incident). On cherche les coordonnées de son symétrique, noté  $A'$ , par rapport à la normale  $(N)$ .
  - On note  $(a';b')$  les coordonnées de  $A'$ . Exprimer, en fonction de  $a'$  et  $b'$ , le coefficient directeur de la droite  $(AA')$ .
  - En utilisant les remarques citées précédemment, montrer que l'on a  $b' = 2a'$ .
  - Déterminer, toujours en fonction de  $a'$  et  $b'$ , les coordonnées de  $I$ , milieu de  $[AA']$ .
  - En déduire alors que les coordonnées de  $A'$  sont  $\left(\frac{1}{5}; \frac{2}{5}\right)$ .
4. Il vous reste alors à déterminer l'équation de la droite  $(A'M)$ .
5. Et de conclure!

## Exercice 26

On considère trois points  $A(2;5)$ ,  $B(-3;1)$  et  $C(4;-2)$ .

- 1) Déterminer une équation cartésienne de la droite  $(AB)$  en utilisant le déterminant.
- 2) Déterminer les coordonnées du point  $H$  le projeté orthogonal de  $C$  sur la droite  $(AB)$ .

## Exercice 27

On considère le cercle  $(C)$  d'équation cartésienne  $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0$  de centre  $A(1;1)$  passant par le point  $C(5;4)$ .

- 1) Déterminer une équation cartésienne de la tangente au cercle passant par le point  $C$ .
- 2) Calculer les coordonnées des points d'intersection du cercle  $(C)$  avec la droite  $(D)$  d'équation  $-x + 3y + 3 = 0$ .

## Exercice 28

On considère les points  $A(4;1)$  et  $B(-5;-7)$ .

Déterminer une équation cartésienne du cercle de diamètre  $[AB]$  en utilisant le produit scalaire.

## Exercice 29

On considère le cercle  $(C)$  d'équation cartésienne  $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0$  de centre  $A(1;1)$  passant par le point  $C(5;4)$ .

- 1) Déterminer une équation cartésienne de la tangente au cercle passant par le point  $C$ .
- 2) Calculer les coordonnées des points d'intersection du cercle  $(C)$  avec la droite  $(D)$  d'équation  $-x + 3y + 3 = 0$ .

## Exercice 30

Dans un repère orthonormé, on considère les points  $A(-1;3)$ ,  $B(5;0)$  et  $C(9;3)$ .

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite  $(AB)$ .
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite  $D$  passant par le point  $C$  et de vecteur normal  $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ .
3. Démontrer que les droites  $D$  et  $(AB)$  ne sont pas parallèles.

On admet que le point  $E(3;1)$  est le point d'intersection de ces deux droites.

4. Les droites  $D$  et  $(AB)$  sont-elles perpendiculaires ?

5. On donne  $AE = 2\sqrt{5}$  et  $EC = 2\sqrt{10}$ .

Calculer la mesure en degrés de l'angle  $\widehat{AEC}$ .