

Probabilités conditionnelles et indépendance – Fiche de cours

1. Probabilités – Variable aléatoire

1.1. Vocabulaire et propriétés des événements

\emptyset est appelé événement impossible

Ω (univers) est appelé événement certain

$A \cap B$ est l'événement « A et B »

$A \cup B$ est l'événement « A ou B »

\bar{A} est appelé événement contraire de A

2 événements sont incompatibles lorsque $A \cap B = \emptyset$

1.2. Probabilité d'un événement

Une expérience aléatoire est constituée par plusieurs issues possibles qui dépendent du hasard.

Soit Ω un univers mathématique représentant l'ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire.

Définition

Soit A un événement tel que $A \subset \Omega$

On définit la probabilité d'un événement A par :

$$p(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} \quad \text{avec } 0 \leq p(A) \leq 1$$

Equiprobabilité

Si l'univers Ω est constitué de n issues qui ont la même probabilité alors :

$$p = \frac{1}{n}$$

Formules

Soit A et B deux événements tel que $A \subset \Omega$ et $B \subset \Omega$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \text{et} \quad p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

2. Conditionnement

a. Probabilités conditionnelles

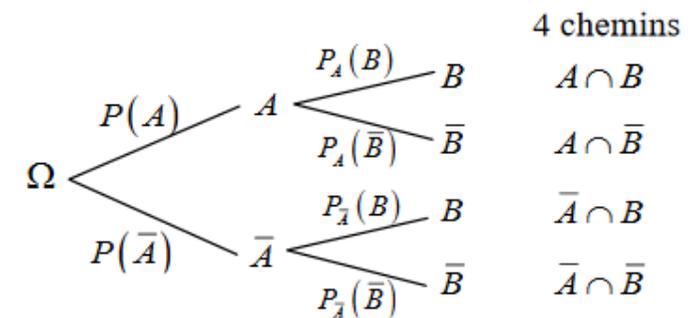
Définition

Soient A et B deux événements d'un univers Ω

On appelle probabilité conditionnelle de l'événement A sachant B le réel :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

b. Arbre pondéré



Les branches sont pondérées par des probabilités conditionnelles

La somme des probabilités issues d'un même sommet (ou partition) est égale à 1

3. Indépendance

a. Evénements indépendants

Définition :

Soit A et B deux événements de probabilité non nulle

A et B sont indépendants lorsque la réalisation de l'un ne change pas la réalisation de l'autre :

Deux événements A et B sont indépendants ssi :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Lorsque A et B sont deux événements indépendants, alors :

- \bar{A} et B sont indépendants
- A et \bar{B} sont indépendants
- \bar{A} et \bar{B} sont indépendants

b. Probabilités totales

Partition :

Les événements A_1, A_2, \dots, A_n forment une partition d'un univers Ω ssi :

- les événements A_1, A_2, \dots, A_n sont 2 à 2 disjoints
- $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$

Définition :

Soit A_1, A_2, \dots, A_n une partition d'un univers Ω , alors :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n)$$

$$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$$