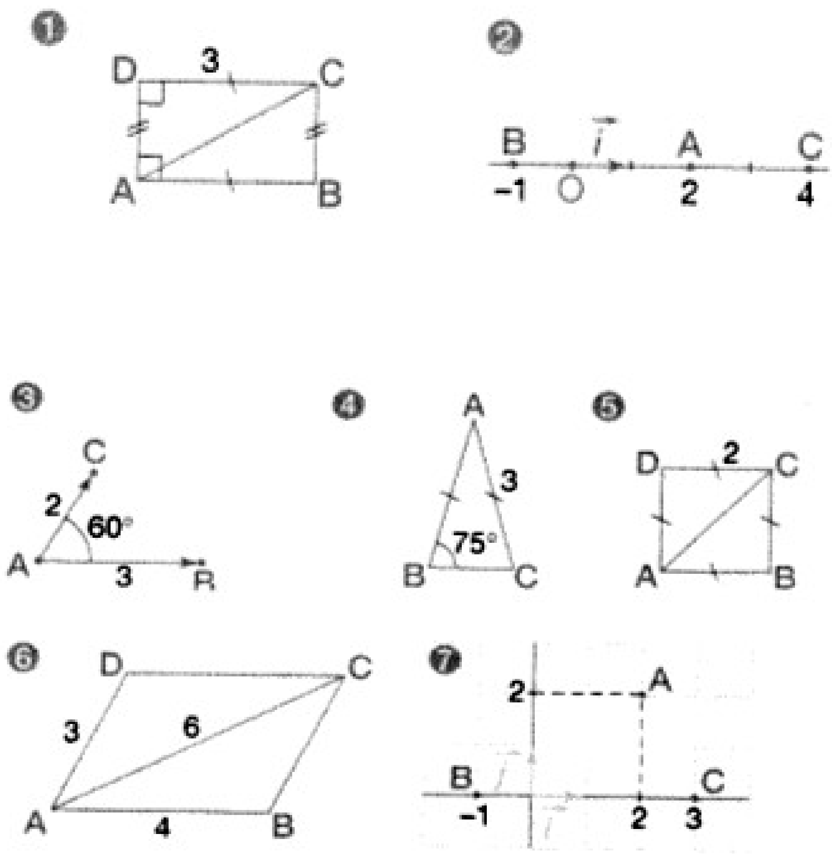
Produit scalaire – Exercices – Devoirs

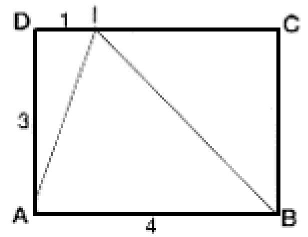
Exercice 1 corrigé disponible

Pour chacune des figures suivantes, calculer : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$



Exercice 2 corrigé disponible

ABCD est un rectangle, I est un point de [CD] défini comme l'indique la figure ci-dessous.



1. Démontrer que : $\left(\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CB}\right)=\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IC}+DA^2$
2. En déduire que : $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}=6$ et $\cos\widehat{AIB}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

Exercice 3 corrigé disponible

Répondre par VRAI (V) ou FAUX (F) :

Question 1

Soient A, B et C trois points distincts du plan.

a) A, B et C sont alignés si et seulement si : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC$

b) (AB) et (AC) sont orthogonales si et seulement si $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

c) A est le milieu de [BC] si et seulement si : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-AB^2$

Question 2

Soit ABC un triangle équilatéral de centre O et de côté 2.

a) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-2$ b) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OB}=-2$ c) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CO}$

Question 3

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $\vec{u}^2=\vec{v}^2$, alors :

a) $\vec{u}=\vec{v}$ ou $\vec{u}=-\vec{v}$ b) $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|$ c) $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$ sont orthogonaux

Question 4

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs tels que : $\vec{u}.\vec{v}=\vec{u}.\vec{w}$, alors :

a) $\vec{v}=\vec{w}$ b) $\vec{u}=\vec{0}$ c) $\vec{u}$ et $\vec{v}-\vec{w}$ sont orthogonaux

Question 5

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $\vec{u}.\vec{v}=-3$ $\|\vec{u}\|=\sqrt{6}$ et $\|\vec{v}\|=\sqrt{2}$, alors :

a) $(\vec{u};\vec{v})=\dfrac{2\pi}{3}$ b) $\|\vec{u}+\vec{v}\|=\sqrt{2}$ c) $\|\vec{u}-\vec{v}\|=\sqrt{14}$

Exercice 4 corrigé disponible

A, B et C sont trois points tels que $AB = 5$, $AC = 8$

1. Est-il possible d'avoir $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 60$?

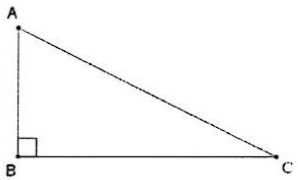
On prend maintenant $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 20$

2. Quelle est la valeur de $\widehat{BAC}$?
3. Calculer BC
4. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$
5. Quelle est l'aire du triangle ABC ?

Exercice 5 corrigé disponible

Dans chaque cas, calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$:

1. ABC est un triangle tel que $AB = 6$cm, $AC = 4$cm et $BC = 7$cm.
2. $A(2;4)$, $B(-1;3)$ et $C(1;-2)$ dans un repère orthonormé.
3. $AB = 6$cm, $AC = 5$cm et $\widehat{BAC} = \dfrac{2\pi}{3}$ radians.
4. $AB = 6cm$



5. $AB = 2AC = 6$cm

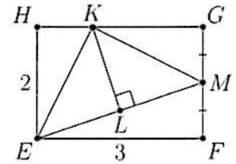
Exercice 6

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité le cm), on donne $A(2;1)$, $B(-1;-3)$ et $C(-3;0)$.

1. Faire une figure.
2. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
3. Déterminer la mesure arrondie au dixième de degré de l'angle $\widehat{BAC}$.
4. On note H le pied de la hauteur issue de B dans ABC.
   Calculer la valeur exacte de AH, puis arrondie au mm près.

Exercice 7 corrigé disponible

$EFGH$ est un rectangle avec $EH = 2$ et $EF = 3$. M est le milieu de $[FG]$, et K est défini par $\overrightarrow{HK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HG}$; L est le projeté orthogonal de K sur (EM).

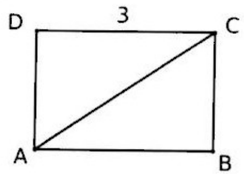


1. Montrer que $\overrightarrow{EK}.\overrightarrow{EM} = 5$
   (décomposer chaque vecteur par la relation de Chasles).
2. En écrivant le produit scalaire $\overrightarrow{EK}.\overrightarrow{EM}$ de deux manières différentes, déterminer :
   (a) la longueur EL
   (b) une mesure de l'angle $\widehat{KEM}$ en radians

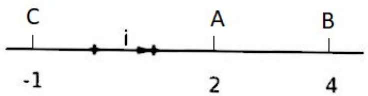
Exercice 8 corrigé disponible

Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ dans chacun des 5 cas suivants :

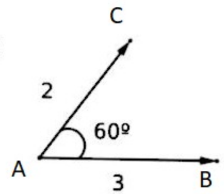
1)



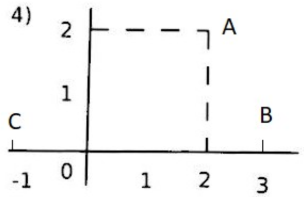
2)



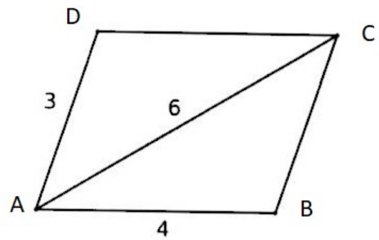
3)



4)



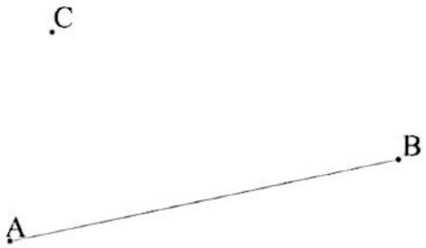
5)



Exercice 9 corrigé disponible

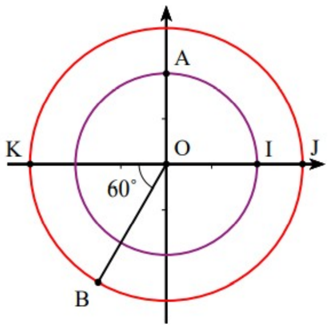
Soient A, B et C trois points distincts tels que $AB = 6$. Déterminer l'ensemble des points M vérifiant les équations suivantes et les représenter sur la figure ci-dessous.

1. $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$
2. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$
3. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = -5$
4. $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = -5$



Exercice 10 corrigé disponible

Sur la figure ci-contre, on a tracé deux cercles de centre O et de rayons respectifs 2 et 3.



1) Calculer les produits scalaires suivants :

a) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OJ}$ c) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OB}$

b) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OK}$ d) $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA}$

2) Prouver que dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ les coordonnées de B sont $-\frac{3}{2}$ et $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$, puis calculer :

a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AI}$ b) $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IJ}$ c) $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{BA}$

Exercice 11 corrigé disponible

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O avec $AB = 15$, $BC = 13$ et $AC = 14$.
Déterminer la longueur BD.

Exercice 12 corrigé disponible

A, B et C sont trois points tels que $AB = 5$, $AC = 8$, et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 20$

a) Faire une figure que l'on complétera par la suite.

b) Quelle est la valeur de $B\hat{A}C$?

c) En écrivant $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ puis en élevant au carré, calculez BC.

d) Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}$ des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

e) Soit I le milieu de $[BC]$. Montrer que, pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = MI^2 - \frac{BC^2}{4}$.

f) En déduire l'ensemble $\mathscr{C}$ des points M du plan tels que $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = 20$

Exercice 13 corrigé disponible

Soit ABC un triangle AB = c ; AC = b et BC = a.
Connaissant certaines indications sur le triangle, déterminer d'autres éléments du triangle :

a. $\hat{A} = \frac{\pi}{4}$; $\hat{B} = \frac{\pi}{3}$ et $a = 1$; calculer b.

b. $\hat{A} = \frac{3\pi}{4}$; $b = 1$ et $c = 2$; calculer a.

Exercice 14 corrigé disponible

Soit ABC un triangle et I le milieu de [BC] tel que BI=CI=2

AI=3 et $\widehat{AIB} = \frac{\pi}{3}$. Calculer $AB^2 + AC^2$ et $AB^2 - AC^2$

En déduire AB et AC

Exercice 15 **corrigé disponible**

Soit ABC un triangle AB = *c* ; AC = *b* et BC = *a*.
Connaissant certaines indications sur le triangle, déterminer d'autres éléments du triangle :

a. $\hat{A} = \frac{\pi}{6}$; $\hat{B} = \frac{\pi}{6}$ et $a = 1$; calculer *b et c*.

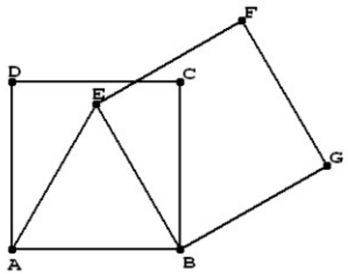
b. $\hat{A} = \frac{2\pi}{3}$; $b = 1$ et $c = 2$; calculer *a et* $\cos \hat{B}$.

c. $\hat{A} = \frac{\pi}{3}$; a = $\sqrt{3}$ et b = 1 ; calculer l'aire du triangle.

Exercice 16 **corrigé disponible**

On considère un triangle équilatéral AEB de côté 1 et deux carrés $ABCD$ et $BGFE$ comme sur la figure ci-contre.

1) Calculer $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BE}$ et en déduire $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BE}$.
2) Calculer $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB}$.
3) Démontrer que BCG est un triangle équilatéral.
4) En déduire $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BG}$ puis $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{EF}$.
5) Calculer $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{EF}$.
6) En utilisant tout ce qui précède, calculer $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{BF}$.
7) En déduire que les points D, E et G sont alignés.



Exercice 17 **corrigé disponible**

On considère le triangle ABC tel que $AB = 2$, $AC = 3\sqrt{2} - \sqrt{6}$ et $BC = 2(\sqrt{3} - 1)$.

1) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ainsi que $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.
2) En déduire les trois angles du triangle ABC.

Exercice 18 **corrigé disponible**

On considère un trapèze $ABCD$ rectangle en A et D tel que $AB = 5$, $CD = 3$ et $AD = 4$.
On note O le milieu de $[AD]$.
Calculer :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$ $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}$