Suites arithmétiques et géométriques – Exercices - Devoirs

Exercice 1 corrigé disponible

1. On considère la **suite arithmétique** définie sur $\mathbb{N}$, de raison $r = -2$ et de premier terme $u_0 = 15$.
   a) Ecrire u_{n+1} en fonction de u_n.
   b) Ecrire u_n en fonction de n.
   c) Calculer u_1 et u_{10} puis la somme $S_{10} = u_0 + u_1 + \ldots + u_{10}$.
2. On considère la **suite géométrique** définie sur $\mathbb{N}$, de raison $q = 3$ et de premier terme $u_0 = \dfrac{1}{81}$.
   a) Ecrire u_{n+1} en fonction de u_n.
   b) Ecrire u_n en fonction de n.
   c) Calculer u_1 et u_{10} puis la somme $S_{10} = u_0 + u_1 + \ldots + u_{10}$.

Exercice 2 corrigé disponible

1. (v_n) est une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q telle que $v_2 = -18$ et $v_4 = -162$. Déterminer q et v_0.
2. Calculer la somme $S = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{32768}$ en justifiant.

Exercice 3 corrigé disponible

On désire décorer l'encolure d'un bustier avec des rangées de perles dont on veut déterminer le nombre.
Le 1er rang comporte 78 perles, le 2ème rang comporte 74 perles, le 3ème rang comporte 70 perles... et ainsi de suite. La dernière rangée comporte 10 perles.

1. Déterminer le rang N correspondant à cette dernière rangée.
2. Calculer le nombre total de perles nécessaires pour décorer le bustier.

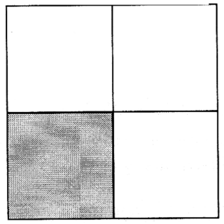
Exercice 4 corrigé disponible

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{2 + 3u_n}$.

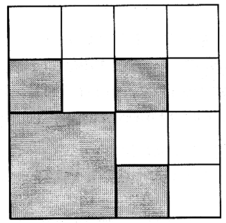
1. Calculer u_1 et u_2 : la suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
2. On suppose que pour tout entier n, on a $u_n \neq 0$, et on définit la suite (v_n) par $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.
   a) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique et préciser sa raison.
   b) Donner l'expression de v_n en fonction de n, et en déduire l'expression de u_n en fonction de n.
3. Etudier la monotonie de la suite (u_n).
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 < u_n \leq 1$.

Exercice 5 corrigé disponible

On effectue un coloriage en plusieurs étapes d'un carré de côté de longueur 2 cm.



Première étape du coloriage :
On partage ce carré en quatre carrés de même aire et on colorie le carré situé en bas à gauche, comme indiqué sur la figure.
(la figure n'est pas en vraie grandeur).



Deuxième étape du coloriage :
On partage chaque carré non encore colorié en quatre carrés de même aire et on colorie dans chacun, le carré situé en bas à gauche, comme indiqué sur la figure.

On poursuit les étapes du coloriage en continuant le même procédé.

Pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 1, on désigne par A_n l'aire, exprimée en cm^2, de la surface totale coloriée après n coloriages.
On a ainsi $A_1 = 1$.
La surface coloriée sur la figure à la 2e étape du coloriage a donc pour aire A_2.

Les deux parties suivantes A et B de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A :

1. Calculer A_2 puis montrer que $A_3 = \dfrac{37}{16}$.
2. On considère l'algorithme suivant :

Entrée : P un entier naturel non nul.
Initialisation : N = 1 ; U = 1.

Traitement :
Tant que N $\leqslant$ P :
Afficher U
Affecter à N la valeur N +1
Affecter à U la valeur $\frac{5}{4} \times \mathrm{U} + \frac{1}{2}$

a) Faire fonctionner cet algorithme avec P = 3.
b) Cet algorithme permet d'afficher les P premiers termes d'une suite U de terme général U_n.
Dire si chacune des deux propositions suivantes est vraie ou fausse. Justifier la réponse.
Proposition 1 : Il existe un entier naturel n strictement supérieur à 1 tel que $\mathrm{U}_n = \mathrm{A}_n$.
Proposition 2 : Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $\mathrm{U}_n = \mathrm{A}_n$.

Partie B :

On admet que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A_{n+1} = \frac{3}{4}A_n + 1$.

1. Que faut-il modifier dans l'algorithme pour qu'il affiche le terme A_n pour n entier naturel donné.
2. On pose pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $B_n = A_n - 4$.
   a) Montrer que (B_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$.
   b) Exprimer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le terme général B_n en fonction de n, et en déduire celui de A_n.
3. Quel est le comportement de A_n lorsque n tend vers $+\infty$? Justifier la réponse.
   Donner une interprétation de ce résultat en rapport avec l'aire de la surface coloriée.
4. Comment transformer l'algorithme pour qu'il affiche le plus petit entier n tel que $A_n > 3.99$.
   A l'aide de la calculatrice, déterminer cet entier n.

Exercice 6 corrigé disponible

1. (v_n) est une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q telle que $v_5 = 486$ et $v_7 = 4374$.
   Déterminer q et v_0.
2. Calculer la somme $S = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \ldots - \frac{1}{6561}$ en justifiant.

Exercice 7 corrigé disponible

Pour les questions suivantes, préciser si la suite (u_n) est arithmétique ou non.

1) $u_n = 2n + 3$

2) $u_n = \frac{3n+1}{2}$

3) $u_n = n^2 - n$

4) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2 + u_n \end{cases}$

Exercice 8 corrigé disponible

Pour les questions suivantes, préciser si la suite (u_n) est géométrique ou non.

1) $u_n = 5^{n+3}$

2) $u_n = \frac{2n+3}{3}$

3) $u_n = 3^n + 3n$

4) $\begin{cases} u_0 = -1 \\ 5u_{n+1} - 2u_n = 1 \end{cases}$

Exercice 9 corrigé disponible

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + 2u_n}$.

1. Calculer u_1 et u_2 : la suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
2. On suppose que pour tout entier n, on a $u_n \neq 0$, et on définit la suite (v_n) par $v_n = \frac{1}{u_n} + 1$.
   a) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique et préciser sa raison.
   b) Donner l'expression de v_n en fonction de n, et en déduire l'expression de u_n en fonction de n.
3. Etudier la monotonie de la suite (u_n).
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 < u_n \leq 1$.

Exercice 10 corrigé disponible

ROC "restitution organisée de connaissances" :

q est un réel non nul et différent de 1.

Pour tout entier naturel n, on note $S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n$.

Montrer que pour tout entier naturel n : $S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Exercice 11 corrigé disponible

1. Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n^2 + u_n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. (u_n) est une suite géométrique de raison $q > 0$ telle que $u_1 = 12$ et $u_5 = 3072$: calculer q puis u_7.
3. Calculer $2 + 5 + 8 + \cdots + 299 + 302$.
4. En utilisant une suite géométrique dont on précisera la raison et le 1er terme, calculer $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 32768$.

Exercice 12 corrigé disponible

1. La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 3n + 2$ est-elle arithmétique ?
2. (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_1 et de raison r telle que $u_{12} = 25$ et $u_{20} = 49$.
   Exprimer u_n en fonction de n puis calculer $u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_{30}$.
3. (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,4$ et de premier terme $u_0 = -3$.
   Etudier les variations de la suite (u_n).

Exercice 13 corrigé disponible

Le 1er janvier 2012, on a placé 5000 euros à intérêts composés au taux annuel de 4%.
(cela signifie que les intérêts ajoutés au capital à chaque nouvelle année représentent 4% du capital de l'année précédente)
Chaque 1er janvier, on place 200 euros supplémentaires sur ce compte.
On note $C_0 = 5000$ le capital disponible au 1er janvier de l'année 2012,
et C_n le capital disponible au 1er janvier de l'année $2012 + n$.

1. Calculer les valeurs exactes de C_1 et C_2.
2. Justifier que pour tout entier n, on a $C_{n+1} = 1,04C_n + 200$.
3. Justifier que la suite (C_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
4. Pour tout entier n, on pose $v_n = C_n + 5000$.
   (a) Calculer v_0 ; montrer que (v_n) est une suite géométrique.
   (b) En déduire l'expression de v_n puis de C_n en fonction de n.

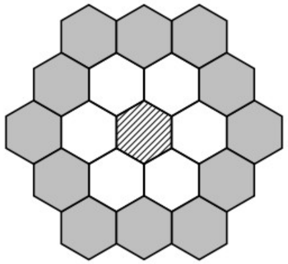
Pour les questions suivantes, toute démarche sera prise en compte dans l'évaluation.

5. Calculer le capital disponible à la fin de l'année 2020, arrondi à l'euro près.
6. Quel nombre minimal d'années devra-t-on attendre pour que le capital disponible dépasse 10 000 euros ?

Exercice 14 corrigé disponible

Un artisan commence la pose d'un carrelage dans une grande pièce.
Le carrelage choisi a une forme hexagonale.
L'artisan pose un premier carreau au centre de la pièce puis procède en étapes successives de la façon suivante :

- à l'étape 1, il entoure le carreau central, à l'aide de 6 carreaux et obtient une première forme.
- à l'étape 2 et aux étapes suivantes, il continue ainsi la pose en entourant de carreaux la forme précédemment construite.



On note u_n le nombre de carreaux ajoutés par l'artisan pour faire la n-ième étape ($n \geqslant 1$).
Ainsi $u_1 = 6$ et $u_2 = 12$.

1. Quelle est la valeur de u_3 ?
2. On admet que la suite (u_n) est arithmétique de raison 6. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Combien l'artisan a-t-il ajouté de carreaux pour faire l'étape 5?
   Combien a-t-il alors posé de carreaux au total lorsqu'il termine l'étape 5 (en comptant le carreau central initial) ?
4. On pose $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$. Montrer que $S_n = 6(1+2+3+\ldots+n)$ puis que $S_n = 3n^2 + 3n$.
5. Si on compte le premier carreau central, le nombre total de carreaux posés par l'artisan depuis le début, lorsqu'il termine la n-ième étape, est donc $3n^2 + 3n + 1$.
   À la fin de sa semaine, l'artisan termine la pose du carrelage en collant son 2 977^e carreau. Combien a-t-il fait d'étapes?

Exercice 15 corrigé disponible

Calculer les sommes suivantes :

1. $S = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{4096}$
2. $S = 4 + 7 + 10 + \ldots + 64$
3. $S = 5 + \frac{17}{3} + \frac{19}{3} + 7 + \ldots + 63$
4. $S = \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \ldots + 16\sqrt{2}$
5. $S = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots - \frac{1}{6561}$

Exercice 16 corrigé disponible

On considère la suite numérique (u_n) définie sur ℕ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{5}{2} \end{cases}$$

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite (u_n).
2. a. Dans un repère orthonormal (unité graphique 1cm), tracer, sur l'intervalle [0,10], la courbe (Γ) représentative de la fonction $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$, ainsi que la droite d d'équation y=x.
   b. Construire graphiquement les cinq premiers termes de la suite (u_n).
   c. Conjecturer graphiquement le comportement de la suite (u_n) (limite et sens de variation).
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 5$ avec $u_0 = 1$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b. Donner l'expression de (v_n) en fonction n, puis de (u_n) en fonction de n.
   c. En déduire le sens de variation de (u_n).

Exercice 17 corrigé disponible

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$u_n = \frac{3 \times 2^n - 4n + 3}{2} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{3 \times 2^n + 4n - 3}{2}$$

1. Soit (w_n) la suite définie par $w_n = u_n + v_n$. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique.
2. Soit (t_n) la suite définie par $t_n = u_n - v_n$. Démontrer que (t_n) est une suite arithmétique.
3. Démontrer que : $u_n = \frac{1}{2}(w_n + t_n)$
4. Exprimer la somme suivante en fonction de n :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

Exercice 18 corrigé disponible

Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + 1999 + 2000 \quad \text{et} \quad S_2 = 2001 + 2002 + 2003 + \dots + 9998 + 9999.$$

Exercice 19 corrigé disponible

1) Démontrer que la somme $S = 1 + 3 + 5 + \dots + 99$ est le carré d'un entier naturel.
2) Calculer, en fonction de n, la somme des n premiers naturels impairs $S' = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$.

Exercice 20 corrigé disponible

Une entreprise décide de verser à ses ingénieurs une prime annuelle de 500 Euros.

Pour ne pas se dévaluer, il est prévu que chaque année la prime augmente de 2% par rapport à l'année précédente. On note (u_n) la suite des primes avec $u_1 = 500$.

1. Calculer u_2 puis u_3 (c'est-à-dire la prime versée par l'entreprise la 2$^{\text{ème}}$ année et la 3$^{\text{ème}}$ année)
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n).

   Un ingénieur compte rester 20 ans dans cette entreprise à partir du moment où est versée la prime.
3. Calculer la prime qu'il touchera la 20$^{\text{ème}}$ année (c'est-à-dire u_{20})
4. Calculer la somme totale S des primes touchées sur les 20 années (c'est-à-dire $S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{20}$)

Exercice 21 corrigé disponible

Calculer la raison d'une suite géométrique croissante dont trois termes consécutifs sont les longueurs des côtés d'un triangle rectangle.

Exercice 22 corrigé disponible

Soit (u_n) une suite définie par $u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{u_n + 3}$ et $u_0 = \frac{-3}{2}$.

1. Calculer la valeur de u_1 , u_2 et u_3 .
2. Cette suite est-elle géométrique? Arithmétique? Justifier votre réponse.
3. Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \frac{u_n + 2}{u_n - 2}$.

   Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 5.
4. Exprimer v_n en fonction de n.
5. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 23 corrigé disponible

Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_4 = 5$ et $u_1 = 11$.

1. Calculer la raison et le premier terme de la suite.
2. Donner l'expression de u_n en fonction de n.
3. Calculer u_{2004} .
4. Soit $S_n = u_0 + u_1 + u_2 = .. + u_n$. Donner l'expression de S_n en fonction de n.
5. En déduire S_{2004} .