Suites numériques – Exercices - Devoirs

Exercice 1 corrigé disponible

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	i est un nombre réel
Traitement :	Pour i allant de 0 à 5
	Afficher $i \times (i-1)$
	Fin de la boucle Pour

1. Donner les différentes valeurs affichées par cet algorithme.
2. Donner l'expression d'une suite (u_n) dont les six premiers termes sont les valeurs affichées par l'algorithme.

Exercice 2 corrigé disponible

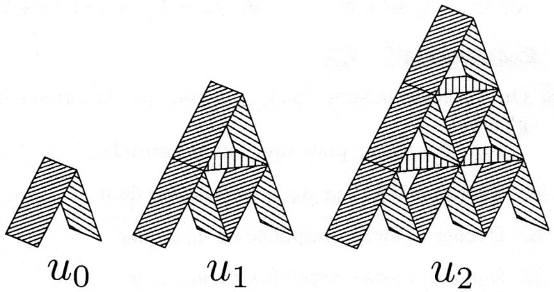
Déterminer les 5 premiers termes des suites suivantes :

a. $u_n = 2 \cdot n^2 - n + 1$ b. $v_n = \dfrac{2 \cdot n + 1}{2 - 3 \cdot n}$

c. $w_n = \sqrt{3n + 25}$ d. $x_n = 3 \cdot \left[1 + (-1)^n\right] + 2$

Exercice 3 corrigé disponible

On considère la construction d'un château de cartes :



On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désignant le nombre de cartes utilisées dans la construction du château à l'étape n.

1. Déterminer les quatres premiers termes de la suite (u_n).
2. Pour tout entier naturel n, déterminer une expression du terme u_{n+1} en fonction du terme précédent u_n et du rang n.
3. A quel étape de construction peut-on arriver avec deux jeux de 72 cartes ?

Exercice 4 corrigé disponible

Dans cet exercice, on mettra en évidence la monotonie des suites par la méthode des quotients.

1. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
   $u_n = \dfrac{3^n}{4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Montrer que (u_n) est strictement croissante.
2. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par :
   $v_n = \dfrac{n}{2^{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
   Montrer que (v_n) est strictement décroissante à partir du rang 2.

Exercice 5 corrigé disponible

Pour les suites suivantes, trouver la fonction f associée à la suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et calculer les termes de u_1 à u_4

1) $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{u_n + 1} \end{cases}$ 2) $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = (u_n + 1)^2 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{u_n} \end{cases}$ 4) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{cases}$

Exercice 6 corrigé disponible

Dans cet exercice, on utilisera la méthode de la différence pour prouver la monotonie des suites :

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite dont le terme de rang n est définie par :

$$u_n = -32n + 102 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Montrer que cette suite est décroissante.

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite dont le terme de rang n est définie par :

$$v_n = \sqrt{2n-1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

Montrer que cette suite est croissante.

3. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite dont le terme de rang n est définie par :

$$w_n = 2n - \frac{25}{n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

Montrer que la suite (w_n) est croissante.

Exercice 7 corrigé disponible

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = u_n - u_n{}^2 - 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. A l'aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous :

n	0	1	2	3	4
u_n					

2. En étudiant la différence de deux termes consécutifs, montrer que la suite (u_n) est décroissante.

Exercice 8 corrigé disponible

Pour les exercices suivants, étudier le sens de variation de la suite (u_n).

a) $u_n = \dfrac{3n-2}{n+1}$

b) $u_n = \dfrac{2^{3n}}{3^{2n}}$

c) $u_n = (n-5)^2, \quad n \geqslant 5$

d) $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - n$

e) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{2^n}{n}$

Exercice 9 corrigé disponible

On définit la suite (u_n) de la façon suivante :

$$u_0 = 2, \quad u_1 = 1 + \frac{1}{2}, \quad u_2 = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}}, \quad u_3 = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}, \quad \text{et ainsi de suite}$$

1) Calculer les valeurs exactes de : u_1, u_2, u_3.

2) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n

3) Ecrire un algorithme permettant de calculer u_n en fonction de n. Remplir ensuite le tableau suivant (on donnera les valeurs à 10^{-4}) :

n	5	10	20	50
u_n				

4) Conjecturer la limite de la suite (u_n)

Exercice 10 corrigé disponible

Soit la suite (U_n) définie par la fonction, $U_n = 2n+1$.

Montrer que cette suite est croissante.

Soit la suite (V_n) définie par la fonction, $V_n = \dfrac{3n}{2^n}$.

Quel est le sens de variation de cette suite ?

Soit la suite (W_n) définie par la fonction, $W_n = \dfrac{3n+1}{2n+2}$.

Quel est le sens de variation de cette suite ?

Exercice 11 **corrigé disponible**

On appelle suite de Fibonacci, la suite (u_n) récurrente à deux termes définie par :

- Les deux premier termes : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$
- la relation : $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

Déterminer les premier termes : u_2, u_3, u_4, u_5, u_6.

2. Programmer en langage Python la fonction def **fibonacci**(n) qui retourne le n$^{\text{ième}}$ terme d'une suite de Fibonacci

Suites numériques – Sujets de devoirs

Exercice 1 corrigé disponible

Les suites (u_n), (v_n) et (w_n) sont définies pour tout entier naturel n, par :

$$u_n = 1 - 3n \quad ; \qquad v_0 = \frac{4}{9} \ \ et \ \ v_{n+1} = \frac{3v_n}{2} \quad ; \qquad w_n = \frac{n^2}{2^n}$$

1. Compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4
u_n					
v_n					
w_n					

2. Démontrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.
3. Démontrer que la suite (v_n) est strictement croissante.
4. On veut démontrer que la suite (w_n) est décroissante à partir du rang 3.
   (a) Etudier le signe de $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ sur $[0; +\infty[$.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $w_{n+1} - w_n = \dfrac{-n^2 + 2n + 1}{2^{n+1}}$
   (c) En déduire que si $n \geq 3$ alors $w_{n+1} \leq w_n$ et conclure

Exercice 2 corrigé disponible

Etudier les variations des suites suivantes :

1. (u_n) définie par $u_n = 2n^2 - 3n - 2$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. (v_n) définie par $v_n = 1 + \dfrac{1}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3. (w_n) définie par $w_n = \dfrac{3n-1}{2-5n}$ pour $\in \mathbb{N}$.

Exercice 3 corrigé disponible

Etudier le sens de variation des suites (u_n) suivantes :

1. $u_n = n^2 - 3n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n^2 + u_n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = -\dfrac{u_n}{5}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. $u_n = \dfrac{3^{n+1}}{5^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. $u_n = \dfrac{2^n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

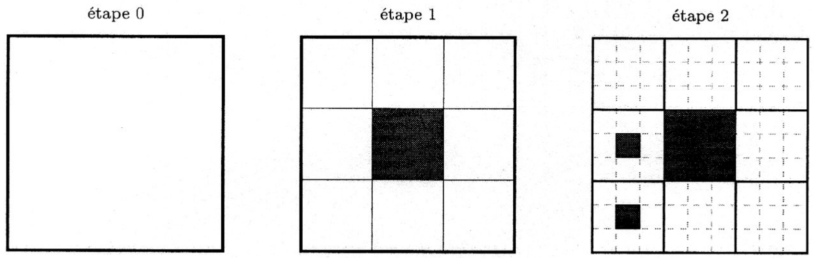
Exercice 4 corrigé disponible

Un carré de $1\,\text{m}^2$ est divisé en neuf carrés égaux comme indiqué sur la figure ci-dessous. On colorie le carré central en gris (étape 1).

Les huit carrés restants sont à leur tout divisés en neuf carrés égaux comme indiqué sur la figure. On colorie les huit carrés centraux obtenus en gris (étape 2).

On continue de la même façon à colorier puis diviser le carré.

Pour tout entier naturel n, on désigne par A_n l'aire en m^2 de la surface totale coloriée après n coloriages.



1. Calculer A_1.
2. Compléter l'étape 2 sur la figure précédente.
3. Calculer A_2.
4. En remarquant qu'à chaque étape, on colorie $\frac{1}{9}$ de la partie non coloriée, justifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a

$$A_{n+1} = \frac{8}{9}A_n + \frac{1}{9}$$

Exercice 5 corrigé disponible

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1; \\ u_{n+1} = u_n + 5 \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. Compléter le programme suivant qui permet de calculer et afficher les premiers termes de la suite (u_n).

```
VARIABLES
n EST_DU_TYPE NOMBRE
u EST_DU_TYPE NOMBRE
k EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
| LIRE n

| u PREND_LA_VALEUR __________
| AFFICHER "\nu_0 = "
| AFFICHER u
| POUR k ALLANT_DE 1 A n
| | DEBUT_POUR

| | u PREND_LA_VALEUR __________
| | AFFICHER "\nu_"
| | AFFICHER k
| | AFFICHER " = "

| | AFFICHER __________
| | FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

3. Tester le programme avec $n = 10$.

Exercice 6 **corrigé disponible**

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{5}{2} \end{cases}$$

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite (u_n).
2. a. Dans un repère orthonormal (unité graphique 1cm), tracer, sur l'intervalle [0,10], la courbe (Γ) représentative de la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ ainsi que la droite d d'équation y=x.
   b. Construire graphiquement les cinq premiers termes de la suite (u_n).
   c. Conjecturer graphiquement le comportement de la suite (u_n) (limite et sens de variation).

Exercice 7 **corrigé disponible**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout nombre entier naturel n, par $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

Si f est la fonction définie sur l'intervalle $]-2\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$, alors on a, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

On donne en annexe (à rendre avec la copie) une partie de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.

1. a) Sur l'axe des abscisses, placer u_0 puis construire u_1, u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction.
   b) Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) ?