

Variables aléatoires réelles – Exercices – Devoirs

Exercice 1 corrigé disponible

Voici trois lois de probabilités et trois couples d'espérance et d'écart type, associez-les sans justification.

Loi de probabilité			Espérance Écart type		
A	x_i	8	14	E	$E(X)=11 \quad \sigma(X) \approx 1,73$
	$p(X=x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$		
B	x_i	8	12	F	$E(X)=10 \quad \sigma(X) \approx 0,85$
	$p(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$		
C	x_i	4	10	G	$E(X)=10 \quad \sigma(X) \approx 2,83$
	$p(X=x_i)$	$\frac{1}{100}$	$\frac{98}{100}$		

2. Donner les lignes d'une fonction Python :

- `def E(X)` retourne l'espérance mathématique d'une variable aléatoire X
- `def V(X)` retourne la variance d'une variable aléatoire X

Exercice 2 corrigé disponible

On considère un dé fantaisiste dont les faces sont marquées de la façon suivante :

- le premier dé : 1, 2, 2, 3, 4, 4

Soit X la variable aléatoire qui indique le numéro du dé

1. Déterminer la loi de probabilité de X
2. Calculer E(X) et V(X)

3. Calculer $E(3X-2)$; $V(3X-2)$; $\sigma(3X-2)$

4. Donner les lignes d'une fonction Python simulant n expériences aléatoires indépendantes et indiquant une estimation de E(X)

La fonction retournera la moyenne statistique m lors d'un échantillonnage de taille n de la loi X

5. Donner les lignes d'une fonction Python permettant d'estimer lors de n expériences aléatoires indépendantes la proportion des valeurs de m de la question 4. vérifiant la condition de fluctuation suivante :

$$|m - E(X)| \leq \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{ou} \quad E(X) - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq E(X) + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$$

Exercice 3 corrigé disponible

On met en place une loterie sans mise initiale. Le jeu consiste à tirer au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. Si c'est 7, 8, 9 ou 10 on perd 10 €, si c'est une figure (valet, dame ou roi) on gagne 10 €, si c'est un as on gagne 20 €.

Notons X, la variable aléatoire représentant le gain en euros à l'issue d'un tirage.

- 1) Quelles sont les valeurs prises par X ?
- 2) Déterminer la loi de probabilité de X
- 3) Calculer E(X) et interpréter le résultat obtenu.
- 4) Cette loterie est-elle défavorable pour l'utilisateur ? Justifier.
- 5) L'organisateur prend la décision de mettre en place une mise initiale à payer par le candidat.

Quelle doit être le montant en euros de cette mise pour que la loterie soit équitable ?

Exercice 4 corrigé disponible

Une urne contient une boule rouge et n boules blanches.

On tire **successivement et avec remise** deux boules de l'urne.

1. Exprimer en fonction de n la probabilité des événements suivants :

M : « Les deux boules sont de la même couleur »

N : « Les deux boules sont de couleur différente »

2. On considère le jeu suivant : le joueur perd $(n + 1)^2$ euros si M est réalisé et gagne $2(n + 1)^2$ euros sinon. On appelle X la variable aléatoire égale au gain (positif ou négatif) du joueur.

- (a) Déterminer la loi de probabilité de X .
(b) Démontrer que $E(X) = -n^2 + 4n - 1$.

Pour les questions suivantes toute trace de recherche et de raisonnement seront pris en compte.

- (c) Pour quelles valeurs de n le jeu est favorable au joueur ?
(d) Si on laisse choisir au joueur le nombre de boules blanches, que doit-il répondre ?

On suppose que $n=2$ boules blanches

3. Calculer $E(X)$, $V(X)$, $E(-X+1)$, $V(-X+1)$

Exercice 5 corrigé disponible

Le coût de production d'un objet est de 950 euros.

Cet objet peut présenter un défaut A, un défaut B, ou bien en même temps le défaut A et le défaut B.

La garantie permet de faire des réparations aux frais du fabricant avec les coûts suivants :

100 euros pour le défaut A et 150 euros pour le défaut B.

On admet que 90% des objets produits n'ont aucun défaut, 5% ont au moins le défaut A, et 4% ont les deux défauts A et B.

1. On note X la variable aléatoire qui, à chaque objet choisi au hasard, associe son prix de revient, c'est-à-dire son coût de production augmenté du coût de réparation éventuel.

Déterminer la loi de probabilité de X .

2. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de cette variable aléatoire.

Que représente $E(X)$ pour l'usine ?

3. On admet que tous les objets produits sont vendus.

- (a) L'usine peut-elle espérer réaliser des bénéfices en vendant 960 euros chaque objet vendu ?
(b) L'usine veut réaliser un bénéfice moyen de 100 euros par objet.

Expliquer comment doit-on alors choisir le prix de vente de l'objet produit.

4. Calculer $\sigma(X)$

Exercice 6 corrigé disponible

Lors d'un jeu A, la variable aléatoire X qui représente le gain (en €), suit la loi de probabilité résumée dans le tableau ci-dessous :

Valeurs i de X	- 10	0	5	10	15
$p(X = i)$	0,6	0,2	0,15	0,04	0,01

- 1) Calculer l'espérance et la variance de X . Le jeu est-il équitable ?
2) Dans un autre jeu B, l'espérance de gain est $-4,7$ et sa variance 100. Marine croit à sa bonne étoile, quel jeu choisira-t-elle ?

Exercice 7 corrigé disponible

1. Au jeu de la Boule, on peut miser sur un numéro parmi les neuf numéros 1 à 9 du tapis de jeu. Si la boule lancée par le croupier s'arrête dans le godet portant le numéro misé, on récupère la mise et on gagne sept fois celle-ci. Sinon, le casino garde la mise. On suppose que les neuf résultats sont équiprobables. Un joueur mise 10 € sur le numéro 1.

On note X la variable aléatoire donnant le gain algébrique de ce joueur.

a) Quelle est la loi de probabilité de X ?

b) Calculer $E(X)$?

2. On peut aussi miser sur « pair » ou sur « impair ». Si l'on mise sur « pair », on gagne si la boule s'arrête sur le 2, le 4, le 6 ou le 8. Si l'on mise sur « impair », on gagne si la boule s'arrête sur le 1, le 3, le 7 ou le 9 (le 5, bien qu'impair, ne permet pas de gagner). Si l'on gagne, on remporte une fois sa mise et on récupère celle-ci. Sinon, le casino garde la mise. Un joueur mise 10 € un jeton sur « pair ».

On note Y la variable aléatoire donnant le gain algébrique de ce joueur.

a) Quelle est la loi de probabilité de Y ?

b) Calculer $E(Y)$.

3. Comparer $E(X)$ et $E(Y)$. Quel commentaire pouvez-vous faire ?