Variable aléatoire – Exercices – Devoirs

Exercice 1 **corrigé disponible**

On lance une pièce bien équilibrée 2 fois successivement. Compléter le tableau :

Evénement	Obtenir 0 "faces"	Obtenir 1 "face"	Obtenir 2 "face"
Probabilité			

Calculer E(X) et V(X)

On lance cette fois la pièce 3 fois successivement. Compléter le tableau :

Evénement : Obtenir k "face"	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
Probabilité				

Calculer E(X) et V(X)

Exercice 2 **corrigé disponible**

Un archer touche sa cible avec une probabilité $p = 0,7$. Il tire deux flèches successivement. On suppose qu'il tire chaque flèche indépendamment des autres (le fait de rater ou de réussir un tir n'influe pas sur la probabilité de réussite du tir suivant).

A l'aide d'un arbre pondéré, compléter le tableau :

Evénement : toucher k fois la cible	$k=0$	$k=1$	$k=2$
Probabilité			

Calculer E(X) et V(X)

Il tire maintenant 3 flèches. Compléter le tableau :

Evénement : toucher k fois la cible	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
Probabilité				

Calculer E(X) et V(X)

Exercice 3 **corrigé disponible**

Une société produit des composants électroniques. La probabilité pour qu'un composant à la sortie de l'usine soit défectueux est égal à 0, 01.
On prélève au hasard quatre composants. La quantité produite est suffisamment importante pour que l'on considère le prélèvement comme étant avec remise ; on arrondira les résultats à 10^{-3} près

1. Calculer la probabilité que l'on ait exactement un composant défectueux dans le lot.
2. Calculer la probabilité que l'on ait au plus un composant défectueux dans le lot.

Exercice 4 **corrigé disponible**

Une compagnie d'assurance constate que 60 % des maisons assurées n'ont pas subi de sinistre dans l'année en cours. Pour adapter les contrats, elle décide de prélever trois dossiers au hasard parmi ses clients. La compagnie est suffisamment importante pour que l'on puisse considérer ces prélèvements comme étant avec remise.

1. Justifier que cette expérience correspond à un schéma de Bernoulli.
2. Calculer la probabilité que deux maisons, ou plus, n'aient pas subi de sinistre

Exercice 5 **corrigé disponible**

25 % des personnes sont formées aux gestes qui peuvent sauver d'un accident cardiovasculaire. Quatre personnes sont témoins d'un accident cardio-vasculaire.

1. Représenter par un arbre pondéré la situation.
2. Quelle est la probabilité que parmi les quatre témoins, aucun ne soit formé aux gestes qui sauvent ?
3. Quelle est la probabilité que parmi les quatre témoins, au moins un soit formé aux gestes qui sauvent ?

Exercice 6 corrigé disponible

Je avec un ami joue au jeu suivant : je lance un dé non pipé deux fois successivement.
- Si les deux même chiffres sortent, je gagne (et mon ami perd...) 10 euros.
- Si le deuxième chiffre obtenu est supérieur au premier, je gagne 5 euros.
- Dans tous les autres cas, je perds 6 euros.

On note X la variable aléatoire égale à mon gain algébrique (gain ou perte) lors d'une partie.

1. Quelles sont les valeurs que peut prendre la variable aléatoire X ?
2. compléter le tableau donnant l'ensemble des probabilités :

Valeurs x_k prises par X	-6	5	10
Probabilité $P(X = x_k)$			

3. Quel est mon gain moyen sur une partie ? Ce jeu est-il équitable ?

Exercice 7 corrigé disponible

5 % des composants électroniques produits par une usine ont des caractéristiques hors de la tolérance imposée, et sont donc considérés comme défectueux.

On prélève au hasard, et avec remise, trois composants à la sortie de l'usine.

On note X la variable aléatoire qui à tout prélèvement de trosi composants associe le nombre de composants défectueux.

1. Quelles sont les valeurs que peut prendre la variable aléatoire X ?
2. Décrire en français l'événement $X = 2$.
3. Calculer la probabilité $P(X = 2)$.
4. Dresser le tableau donnant la loi de probabilité de X.
5. Quel nombre de composants défectueux peut-on s'attendre à avoir, en moyenne, sur un prélèvement aléatoire de 3 composants ?

Exercice 8 corrigé disponible

James joue aux fléchettes. A chaque lancer, la probabilité pour qu'il touche la zone rapportant au moins 10 points est de 0,6. Il lance successivement 4 fléchettes. On appelle X la variable aléatoire qui correspond au nombre de fois où il marquera au moins 10 points.

a. Expliquer pourquoi X suit un schéma de Bernoulli dont on précisera les paramètres.

b. Quelle est la probabilité pour qu'il marque exactement 2 fois 10 points ?

c. Quelle est la probabilité pour qu'il marque moins de 2 fois 10 points ?

d. Quelle est la probabilité pour qu'il marque au moins 1 fois 10 points ?

Exercice 9 corrigé disponible

Un lot de graine est réputé avoir un taux de germination de 80 %. Soit X la variable aléatoire définissant le nombre de graine ayant germé dans un lot de 25 graines.

a. Quel est le modèle suivi par la variable aléatoire ?

b. Calculer la probabilité que toutes les graines germent.

c. Calculer la probabilité que au moins une graine germe.

d. En moyenne combien peut-on espérer de graines germées ?

Exercice 10 corrigé disponible

Sur une route départementale, il y a un panneau « stop » à l'intersection avec la route nationale. On a remarqué que 5 % des automobilistes ne respectent pas ce stop, et que chaque jour 30 voitures se présentent à ce carrefour.

a. Quelle est la probabilité qu'aucun automobiliste ne « grille » le stop ?

b. Quelle est la probabilité pour que au moins 1 automobiliste ne respectent pas le stop ?

Exercice 11 corrigé disponible

Dans chaque cas, dire s'il s'agit d'une épreuve de Bernoulli.	Epreuve de Bernoulli ? Vrai	Faux
a. Dans une usine qui fabrique des moteurs électriques, qui peuvent être de trois types : 1,5 Volts, 9 Volts ou 12 Volts. On choisit un moteur au hasard dans la production.		
b. On lance en l'air une pièce, et on observe la face apparente une fois qu'elle retombe au sol.		
c. Dans un lycée, on choisit un élève au hasard, et on s'intéresse à son mois de naissance.		
d. Dans un lycée, on choisit un élève au hasard, et on s'intéresse à son sexe.		
e. Dans un lycée, on choisit un élève au hasard, et on s'intéresse au fait qu'il ait réussi (ou pas) son bac.		

Exercice 12

On lance successivement 5 fois une pièce, et on note dans l'ordre les 5 résultats obtenus (P ou F).

1. Dresser la liste des 32 combinaisons possibles

P P P	P P F	P F P	P F F	F F F	F F P	F P F	F P P

2. On admet que toutes les combinaisons sont équiprobables.
a. Quelle est la probabilité de l'événement « j'obtiens la combinaison P F P F P » ?
b. Quelle est la probabilité de l'événement « j'obtiens exactement deux FACE » ?
c. Quelle est la probabilité de l'événement « j'obtiens au moins deux FACE » ?
d. Quelle est la probabilité de l'événement « j'obtiens au moins un FACE » ?

Exercice 13

Dans une clinique, 48% des enfants qui naissent sont des filles (les autres sont évidemment des garçons). Aujourd'hui, quatre bébés sont nés. On admettra que cela revient à reproduire 4 fois une épreuve de Bernoulli dont le « succès » est « le bébé est une fille », et dont la probabilité est 0,48.

1. Construire l'arbre pondéré correspondant à cette situation.

2. Déterminer les probabilités des événements suivants (on arrondira les résultats au millième) :
A = « les quatre bébés sont des filles »
B = « il y a deux filles et deux garçons »
C = « il y a exactement une fille parmi les quatre bébés »

Exercice 14

Lors de la séance de tirs au but à la fin d'un match de football, il a été établi que le taux de réussite d'un tir est de 77%. On admettra que cela revient à reproduire 5 fois une épreuve de Bernoulli dont le « succès » est « le tir au but est réussi », et dont la probabilité est 0,77.

1. Construire l'arbre pondéré correspondant à cette situation.

2. On appelle X le nombre de tirs au but marqués lors de la séance (donc 5 tirs en tout).
a. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X sous forme d'un tableau.
b. Calculer l'espérance de X. Interpréter ce nombre.

3. A l'aide du tableau précédent, déterminer la probabilité des événements suivants :
A = « tous les tirs au but sont réussis »
B = « tous les tirs au but sont manqués »
C = « au moins 3 tir sont réussis »

Exercice 15

1. Ecrire un programme Python simulant le tirage au sort d'un dé à 6 faces
2. Réaliser 1000 tirages au sort et calculer la fréquence d'apparition de la face 1
3. Répéter l'expérience précédente 100 fois puis noter la moyenne des fréquences de la face 1. Conclure

Exercice 16

Un cube de 3 cm de côté est peint en bleu puis découpé en petits cubes identiques de 1 cm de côté, comme indiqué sur la figure. On place ces petits cubes dans un sac. Puis on tire au hasard un cube du sac. On s'intéresse à la variable aléatoire X correspondant au nombre de faces peintes en bleu du cube tiré. Déterminer la loi de probabilité de X

Exercice 17

Un trader a analysé plusieurs scénarios quant à l'évolution de deux actions notées A et B. On note X la variable aléatoire donnant l'évolution en euros de l'action A et Y celle donnant l'évolution en euros de l'action B. Voici les lois de probabilités de X et de Y .

Valeurs de X	-50	0	10	40
Probabilités	0,1	0,3	0,5	0,1

Valeurs de Y	-30	10	30
Probabilités	0,3	0,4	0,3

1. Vérifier que E(X) = E(Y). Interpréter.
2. Calculer V (X) et V (Y).
3. Le trader ne souhaite pas prendre trop de risques et décide d'investir sur l'action la moins volatile. Quelle action lui conseillez-vous ?

Exercice 18

A la fête foraine, une roue de la fortune est partagée en 12 secteurs égaux. Six sont bleus, deux sont roses, trois sont jaunes et un est vert. Pour jouer, il faut payer 5 €.
On fait tourner la roue :

- Si le bleu sort, on a perdu et on ne reçoit rien.
- Si le jaune sort, on est remboursé du prix de la partie.
- Si le jaune sort, on est remboursé du prix de la partie.

Le forain veut attribuer le plus gros gain au secteur vert. Aidez le à choisir le gain du secteur vert.

Exercice 19

On lance un dé truqué à 6 faces numérotées de 1 à 6.
Les faces de 1 à 5 ont la même probabilité de sortir.
La probabilité de la face 6 est le double de la probabilité de la face 5.
On note X la variable aléatoire égale au numéro sorti.
1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Déterminer E(X) et V(X).

Exercice 20

Une entreprise fabrique des appareils susceptibles de présenter deux types de pannes notées A et B. On admettra que 5 % des appareils sont concernés par la panne A, 3 % par la panne B et 1 % par les deux.
On prélève au hasard un appareil dans la production. On note :

- A l 'événement : L'appareil présente la panne A.
- B l'événement : L'appareil présente la panne B.

L'entreprise fabrique un grand nombre d'appareils par semaine. Chaque appareil a un coût de fabrication de 200 euros. La réparation d'une panne A coûte 60 euros à l'entreprise, la réparation d'une panne B coûte 40 euros et la réparation des deux pannes coûte 100 euros.

On considère la variable aléatoire X qui, à chaque appareil, associe son prix de revient total (coût de fabrication et coût de la réparation éventuelle).
1. Etablir le tableau de la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
2. Calculer l'espérance E(X) de la variable aléatoire X. Interpréter

Exercice 21

Un jeu consiste à lancer un dé cubique bien équilibré numéroté de 1 à 6. Si le résultat est :

- 1, 2 ou 3, alors on perd 2 points ;
- 4 ou 5, alors on ne perd ni ne gagne rien ;
- 6, alors on gagne 3 points.

On note G la variable aléatoire qui, à chaque lancer, associe le gain, positif ou négatif, du joueur.

1. Recopier et compléter le tableau qui représente la loi de probabilité de la variable G :

Valeur g_i	-2	0	3
Probabilité $p(G = g_i)$			

2. Calculer $E(G)$.
3. Que peut-on remarquer ?

Exercice 22

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Déterminer la loi de probabilité de X.
3. Calculer $E(X)$.
4. Interpréter le résultat.

Exercice 23

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous :

Valeur x_i	0	10	20	30	40
Probabilité $p(X = x_i)$	0,3	0,1	0,3	0,2	0,1

Calculer l'espérance $E(X)$.

Exercice 24

Soit Y une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous :

Valeur y_i	-3	-1	0	1	5
Probabilité $p(Y = y_i)$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

Calculer l'espérance $E(Y)$.

Exercice 25

Pour financer leur voyage scolaire, des élèves ont organisé une tombola et vendu 400 billets. Le nombre de billets gagnants est résumé dans le tableau ci-dessous :

Gains en euros	100	50	20	10
Nombre de billets	1	2	5	10

Les autres billets sont perdants.

Loïc achète un billet. On note G la variable aléatoire qui, au choix d'un billet, associe le gain correspondant.

Une entreprise fabrique des brioches de poids standard 700 g.

Si une brioche pèse entre 700 g et 720 g, elle est vendue au prix de 3 €. Sinon, elle est vendue dans des magasins à prix cassés à 2 € si elle pèse plus de 720 g et à 1,50 € si elle pèse moins de 700 g.

On sait que :

- 80 % des brioches ont une masse comprise entre 700 et 720 g;
- 15 % des brioches ont une masse inférieure à 700 g;
- 5 % des brioches ont une masse supérieure à 720 g.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque brioche tirée au hasard, associe son prix de vente.

1. Dresser la loi de probabilité de G.
2. Calculer l'espérance $E(G)$. Interpréter le résultat.
3. Quel est le prix minimum d'un billet de tombola que les élèves ont dû fixer pour ne pas perdre de l'argent?

Exercice 26

Une entreprise fabrique des téléphones portables.

Pendant la période de garantie, le fabriquant doit effectuer les réparations à ses frais. Une étude sur les téléphones vendus permet d'affirmer que :

- 10 % des téléphones auront uniquement un problème de batterie ;
- 5 % des téléphones auront uniquement un problème d'écran ;
- 2 % des téléphones auront un problème de batterie et un problème d'écran ;
- 3 % seront jugés non réparables.

Dans les autres cas, le client n'utilisera pas la garantie de son téléphone.

Les coûts pour l'entreprise sont de 20 € pour un problème de batterie, 40 € pour un problème d'écran et 100 € si le téléphone ne peut être réparé et s'il doit être remplacé.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque téléphone vendu, associe son coût de réparation.

1. Déterminer la loi de probabilité de X en complétant le tableau suivant :

Valeur x_i	0	20	40	60	100
Probabilité $p(X = x_i)$					

2. **a.** Interpréter à l'aide d'une phrase l'événement : $\{X > 0\}$.
   b. Calculer sa probabilité.
3. Calculer $E(X)$. Que représente cette valeur pour l'entreprise ?
4. Un téléphone vendu 250 € a un coût de fabrication de 200 €. Quel est le bénéfice espéré pour l'entreprise, par téléphone vendu, après ses éventuels frais de garantie ?