Variable aléatoire – Fiche de cours

1. Variable aléatoire – Variable aléatoire

1.1. Variable aléatoire et loi de probabilité

Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire.

On appelle variable aléatoire réelle X une fonction définie de $\Omega \to \mathbb{R}$

On appelle loi de probabilité de la variable aléatoire X la fonction qui à chaque valeur x_i associe la probabilité de l'événement $P(X = x_i)$

On peut résumer les résultats dans un tableau

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

1.1. Paramètres d'une variable aléatoire

1.1.1. Espérance mathématique

On appelle espérance mathématique :

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i$$

si $E(X) > 0$, l'expérience aléatoire est favorable

si $E(X) = 0$, l'expérience aléatoire est équitable

si $E(X) < 0$, l'expérience aléatoire est défavorable

1.1.2. Variance et écart type

On appelle variance :

$$V(X) = \sum (x_i - E(X))^2 \cdot p_i = E(X^2) - E(X)^2$$

On appelle écart type : $\sigma = \sqrt{V(X)}$

2. Loi binomiale

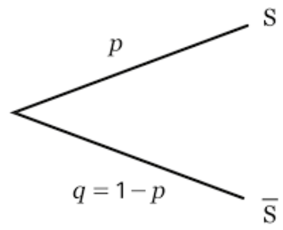
2.1. Définitions

- Loi ou épreuve de Bernouilli

La loi de Bernouilli est une expérience aléatoire avec 2 issues :

Succès : probabilité *p* Echec : probabilité *1-p*

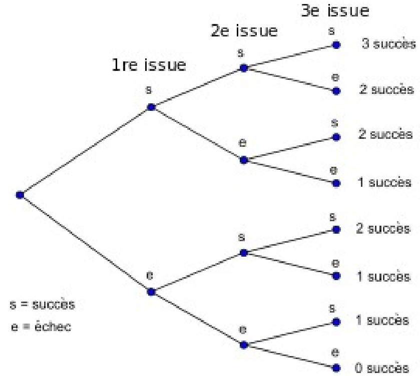
p est appelé paramètre de la loi de Bernouilli



- Loi binomiale

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès

Pour n répétitions identiques et indépendantes de la loi de Bernouilli de paramètre p, X suit une loi binomiale B(n ; p)



2.2. Espérance et écart type

- Espérance mathématique : $E(X) = n \times p$
- Variance et l'écart type : $V(X) = n \times p \times (1-p)$ $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

3. Echantillonnage

a. Définition

Un échantillon de taille n est une liste de résultats obtenus pour n répétitions identiques et indépendantes.

b. Fluctuation d'échantillonnage

Soit une population dont la proportion du caractère est p. On observe une fréquence f de ce caractère dans un échantillon de taille n.

Pour N échantillons de taille n, on a :

- 68 % de chance que $f \in [\, p-\sigma \,;\, p+\sigma \,]$
- 95,5 % de chance que $f \in [\, p-2\sigma \,;\, p+2\sigma \,]$
- 99,7 % de chance que $f \in [\, p-3\sigma \,;\, p+3\sigma \,]$