# Fonctions de référence – Exercices – Devoirs

## Exercice 1 corrigé disponible

Soit *f* la fonction carrée définie pour tout réel x par $f(x)=x^2$ et $C_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan.

1. Représenter $C_f$ pour $x\in[-4;4]$
2. Résoudre graphiquement puis par le calcul les équations et inéquations suivantes :
   - $f(x)=5$ - $f(x)=-10$ - $f(x)=0$
   - $f(x)\geq -1$ - $f(x)<0$ - $f(x)<7$
3. Donner un encadrement de f(x) dans les cas suivants :
   - $x\in]-\infty\ ;-1\ ]$ - $x\in]2\ ;\ 4\ ]$ - $x\in]-2\ ;\ 3\ ]$
4. On donne $f(3)=9$ ; écrire une phase équivalente avec le terme suivant :
   a. antécédent b. équation c. image
5. Déterminer l'équation de la droite *d* passant par les points $A(1;1)$ et $B(-2;4)$ ; on notera h(x) la fonction associée
6. Résoudre graphiquement $f(x)=h(x)$
7. Démontrer que $f(x)-h(x)=(x-1)(x+2)$
8. En utilisant la question précédente étudier la position relative de $C_f$ et *d* selon les valeurs de x.

## Exercice 2 corrigé disponible

On appelle *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+4x-5$

1. Calculer l'image de 0 et de -2 par *f.*
2. Déterminer le ou les antécédents éventuels de -5.
3. Montrer que l'on a $f(x)=(x+2)^2-9$ ; en déduire une factorisation de f(x).
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$ .
5. Montrer que $f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)(x_2+x_1+4)$ . En déduire que *f* est croissante sur $[-2;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;-2]$ . Construire le tableau de variation et précisez le minimum.

## Exercice 3 corrigé disponible

Soit x un nombre réel

1. L'affirmation si $x^2\geq 9$ alors $x\geq 3$ est-elle vraie ?
2. Ecrire une proposition équivalente à $x^2\geq 9$

## Exercice 4 corrigé disponible

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(x-3)^2=25$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(1-2x)^2\geq 9$

## Exercice 5 corrigé disponible

1. Résoudre les équations suivantes :
   a. $x^2-4-(x+2)(3x-1)=0$
   b. $(x-2)^2-(3x-1)^2=0$
   c. $x^2-16=(x-4)^2(x+5)$
2. Résoudre les inéquations suivantes :
   a. $x^2<5x$
   b. $x^2>49$

## Exercice 6 corrigé disponible

Pour chaque cas, donner un encadrement de $x^2$ :

1. $-2<x\leq 7$
2. $x>3$
3. $-6\leq x<3$
4. $x<-2$

**Exercice 7** **corrigé disponible**

Soit *f* la fonction définie sur $[-3;3]$ par $f(x)=x^2+x-2$

On donne sa représentation graphique dans un repère orthogonal

1. Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes :

a. $f(x)=0$ b. $f(x)=-2$ c. $f(x)\leq 0$

2. Tracer dans le même repère la droite représentant la fonction g définie sur $[-2;1]$ par $g(x)=-x+1$ .

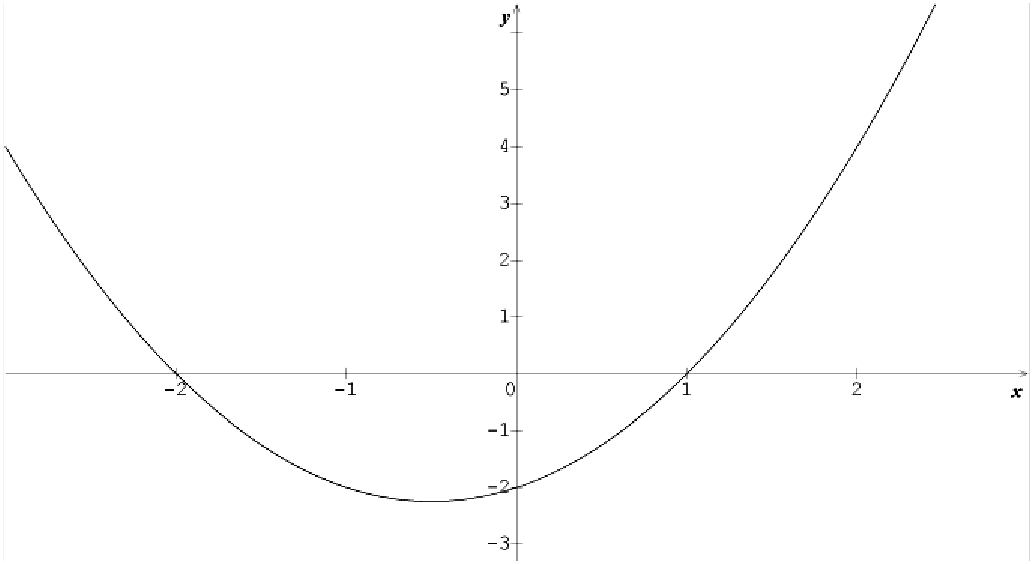
En déduire les solutions de l'équation : $f(x)=-x+1$

3. Déterminer par le calcul les antécédents de -2 par f(x)

4. a. Vérifier que l'on a pour tout x $f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$

b. En déduire la résolution par le calcul de l'équation $f(x)=0$

c. Résoudre par le calcul l'inéquation $f(x)\leq 0$



## Exercice 8 corrigé disponible

Soit la fonction définie par $f(x)=\sqrt{x}$

1. Quel est le domaine de définition de $f(x)$ ?
2. Démontrer le sens de variation de la fonction racine carrée.
3. Comparer $f(3)$ et $f(\pi)$ ; justifier

Soit les fonctions $h(x)=\sqrt{(x+1)}$ $k(x)=\sqrt{(x)}+1$ $\forall x\in[0;+\infty[$

4. Comparer $h(x)$ et $k(x)$ ; justifier.
5. Démontrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.
6. Indiquer la (les) réponse(s) correcte(s) en justifiant :
   a. $\forall n\in\mathbb{N}$ $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\geq 1$
   b. $\sqrt{3}-\sqrt{2}\leq 1$
   c. $\forall n\in\mathbb{N}$ $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\geq 1$
7. Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme $a\sqrt{b}$ avec $a\in\mathbb{Z}$ $b\in\mathbb{N}$ b étant le plus petit possible :
   $A=-5\sqrt{28}+5\sqrt{63}-\sqrt{112}$ $B=\sqrt{160}\times\sqrt{40}\times\sqrt{90}$
8. Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme $a+b\sqrt{c}$ avec $a\in\mathbb{Z}$ $b\in\mathbb{Z}$ $c\in\mathbb{N}$ c étant le plus petit possible :
   $A=(4\sqrt{5}-3\sqrt{6})^2$ $B=(2\sqrt{10}+4\sqrt{6})^2$
9. Ecrire sans racine carrée au dénominateur :
   $A=\frac{2+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$
10. Calculer ou résoudre en justifiant :
    a. $\sqrt{\left(\pi-\frac{7}{2}\right)^2}$ b. $\sqrt{x-5}=3$ c. $\sqrt{(x-5)^2}=3$

## Exercice 9 corrigé disponible

1. Montrer que $\sqrt{2}+1$ est l'inverse de $\sqrt{2}-1$
2. Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme $a+b\sqrt{c}$ avec $a\in\mathbb{Z}$ $b\in\mathbb{Z}$ $c\in\mathbb{N}$ c étant le plus petit possible :
   - $\sqrt{28}\times\sqrt{63}\times\sqrt{12}$
   - $(5\sqrt{3}-7\sqrt{2})\cdot(2\sqrt{3})$
   - $(4\sqrt{7}+2)\cdot(3-\sqrt{7})-10\sqrt{7}$
   - $\frac{(2\sqrt{7}-3\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$
   - $(\sqrt{3}+5)^2+(\sqrt{3}-5)^2$
3. Le nombre d'or est défini par $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

   Ce nombre est solution de l'équation $x^2=x+1$

   Calculer $\phi^2$ et $\phi+1$ . Conclure
4. Résoudre :
   a. $\sqrt{(x-4)^2}=-1$ b. $\sqrt{(3-x)^2}=\sqrt{64}$ c. $\sqrt{2x-1}=x$

## Exercice 10 corrigé disponible

1. Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b le plus petit possible :
   $A=-5\sqrt{12}+2\sqrt{48}+2\sqrt{27}$ $B=\sqrt{112}\times\sqrt{28}\times\sqrt{63}$
2. Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme $a+b\sqrt{c}$ avec a, b et c entiers :
   $C=(2\sqrt{7}+3\sqrt{10})^2$ $D=(\sqrt{5}-2\sqrt{11})^2$
3. Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme d'un nombre entier :
   $E=(4-3\sqrt{5})(4+3\sqrt{5})$ $F=\frac{16\sqrt{18}}{6\sqrt{32}}$

## Exercice 11 **corrigé disponible**

Soit la fonction définie par $f(x)=x^3$

1. Quel est le domaine de définition de $f(x)$ ?

2. Etude des variations

**On suppose que $0 \leq a < b$ :**

**a.** Quel est le signe de $a - b$ ?

**b.** Déterminer $f(a)$ et $f(b)$ et les comparer.

On utilise l'identité remarquable : $a^3-b^3=(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$

**c.** Quel est alors le sens de variation de la fonction cubique sur $[0;+\infty[$

**On suppose que $a < b \leq 0$ :**

**d.** Quel est le signe de $a - b$ ?

**e.** Déterminer $f(a)$ et $f(b)$ et les comparer.

**f.** Quel est alors le sens de variation de la fonction cubique sur $]-\infty;0]$ .

**Cas général**

**g.** Dresser le tableau de variation de la fonction cube sur $\mathbb{R}$ .

3. Comparer $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $f(\sqrt{2})$ ; justifier

Soit la fonction $g(x)=3x^2-3x+1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

4. Comparer $f(x)$ et $g(x)$ ; que peut-on en déduire pour la position relative des courbes représentatives de $f(x)$ et $g(x)$ ?

## Exercice 12 **corrigé disponible**

1. Représenter dans un repère orthonormal du plan la fonction $f(x)=\frac{1}{x}$ pour $x \in [-5;5]$

2. Compléter :

- si $x<-1$ alors $\ldots<\frac{1}{x}<\ldots$
- si $1 \leq x \leq 2$ alors $\ldots<\frac{1}{x}<\ldots$

3. Résoudre algébriquement dans $\mathbb{R}$ :

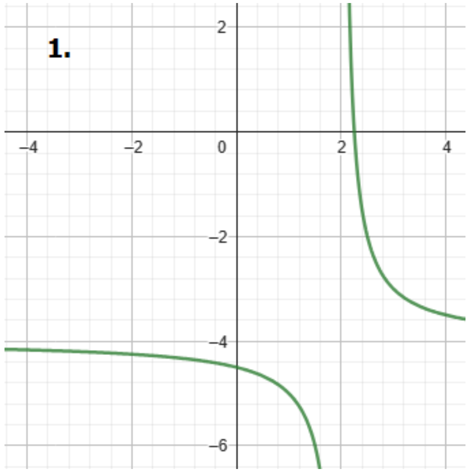
- $\frac{1}{x}=-3$
- $\frac{1}{x} \geq 2$
- $\frac{1}{x} \leq 1$

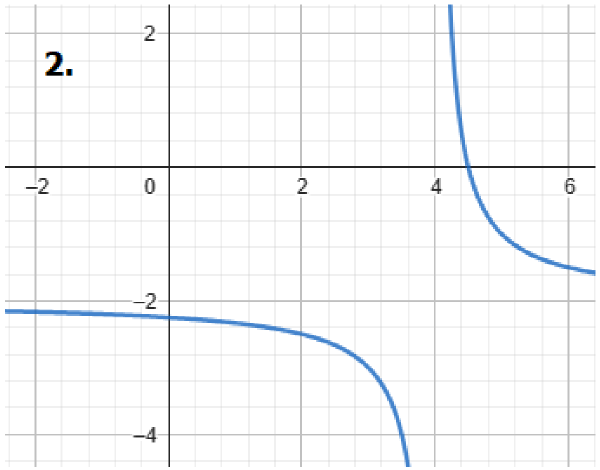
4. Retrouver graphiquement les résultats de la question 3.

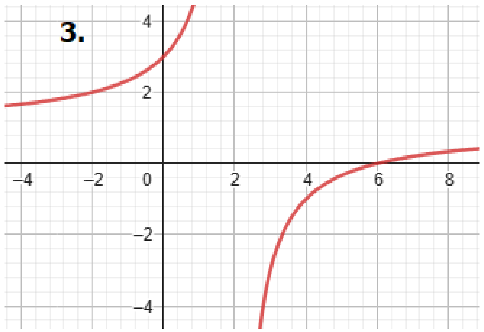
## Exercice 13 **corrigé disponible**

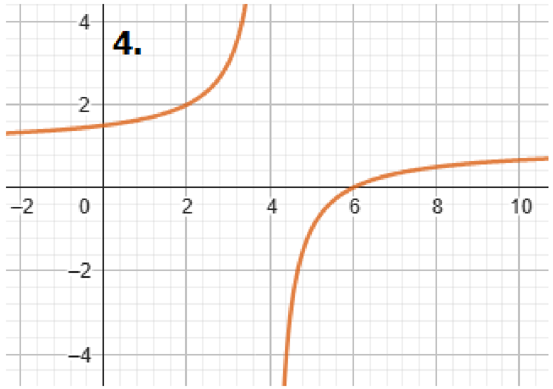
Associer à chaque fonction sa représentation graphique :

- $f(x)=\frac{-2}{(x-4)}+1$
- $g(x)=\frac{1}{(x-4)}-2$
- $h(x)=\frac{-4}{(x-2)}+1$
- $i(x)=\frac{1}{(x-2)}-4$



## Exercice 14 corrigé disponible

Soit $f$ la fonction définie pour tout réel $x \neq -2$ par $f(x) = 1 - \frac{6}{x+2}$. On note $C_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $C_f$ avec les axes du repère.
2. a) Étudier le sens de variation de la fonction $f$ sur l'intervalle $]-2;+\infty[$
   b) On admet que la fonction $f$ est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty;-2[$. Donner le tableau de variations de la fonction $f$.
3. Soit $g$ la fonction affine telle que $g(-1) = -3$ et $g(3) = 1$.
   Déterminer l'expression de $g(x)$ en fonction de $x$.
4. a) Montrer pour tout réel $x \neq -2$, $f(x) - g(x) = \frac{x - x^2}{x+2}$.
   b) Résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$.

## Exercice 15 corrigé disponible

1. Résoudre l'inéquation $\frac{1}{x} > 4$
2. Résoudre l'inéquation $\frac{1}{x} \geq -3$
3. Résoudre l'inéquation $1 \leq x^3 < 27$
4. Résoudre l'inéquation $x^3 > 8$

## Exercice 16 corrigé disponible

Un rectangle a une aire égale à $60m^2$. On note $x$ la largeur et $y$ la longueur, en m de ce rectangle.

1. Exprimer la longueur $y$ en fonction de $x$
2. Déterminer la largeur $x$ lorsque $y = 24$
3. On souhaite que la longueur de ce rectangle soit telle que $y \leq 10$
   Montrer que sa largeur doit être telle que $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{6}$
   Déterminer les valeurs possibles de $x$

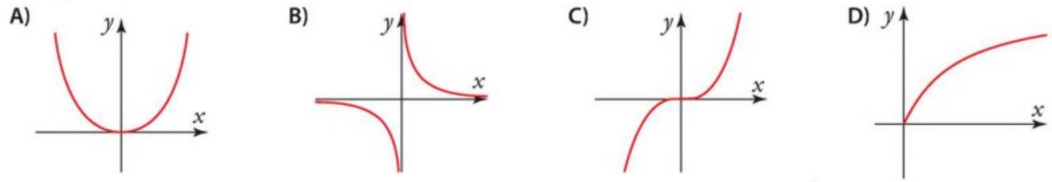
## Exercice 17 corrigé disponible

Calculer l'image de chaque nombre par la fonction cube

1. $3$
2. $-1$
3. $-\frac{2}{3}$
4. $\frac{5}{2}$

## Exercice 18 corrigé disponible

Retrouver à quelle fonction, à quel ensemble de définition et à quelle expression littérale correspond chacune des courbes représentatives des fonctions de référence suivantes.




| | | |
|---|---|---|
| 1. fonction inverse | a) définie sur $[\,0\,;\,+\infty[$ | I) $f(x) = \frac{1}{x}$ |
| 2. fonction cube | b) définie sur $\mathbb{R}$ | II) $h(x) = x^3$ |
| 3. fonction racine carrée | c) définie sur $\mathbb{R}^*$ | III) $g(x) = \sqrt{x}$ |
| 4. fonction carré | d) définie sur $\mathbb{R}$ | IV) $i(x) = x^2$ |

A) ________________ B) ________________ C) ________________ D) ________________

## Exercice 19

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $\frac{1}{x}=-5$
2. $\frac{3}{x}\geq -2$
3. $\frac{x}{2x+3}=-\frac{3}{4}$
4. $\frac{4-7x}{2x+1}\geq 0$

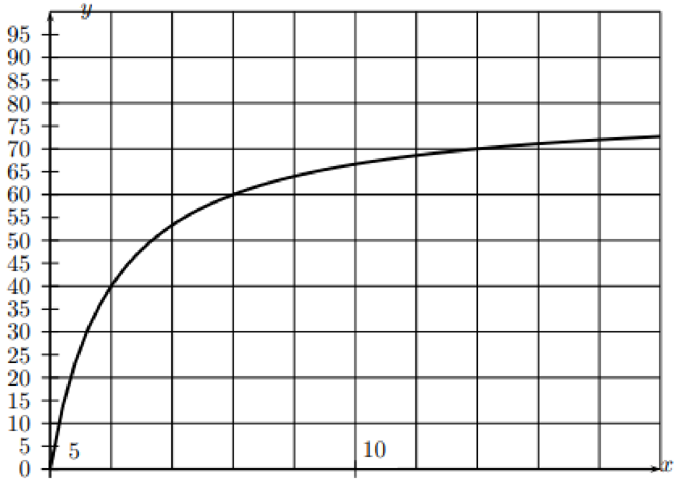
## Exercice 20

Dans une entreprise vendant des céréales une campagne de publicité est faite pour la promotion du produit le pourcentage de personnes connaissant le nom du produit après x semaines de publicité est donné par

$$p(x)=\frac{80x}{x+1}$$

1. Calculer p(4) et en déduire le pourcentage de personne ignorant le nom du produit après x semaines de publicité
2. L'écriture de p(x) est-elle compatible avec les affirmations suivantes ?
   a. avant la campagne, personne ne connaissait le produit
   b. après 15 semaines, tout le monde connaît le produit

L'entreprise envisage une campagne de 10 semaines de publicité la courbe de la fonction $p(x)=\frac{80x}{x+1}$ est représentée ci dessous pour $x\in[0;10]$




3. Déterminer graphiquement la durée nécessaire pour que p(x) dépasse 60%
4. Déterminer graphiquement combien de semaines supplémentaires sont nécessaires pour que le pourcentage p(x) dépasse 70%
5. La campagne de publicité sera efficace durant les trois premières semaines puis moins efficace ensuite ! au vu du graphique, cette affirmation est-elle justifiée ?

## Exercice 21

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

1. $\frac{2x+1}{-x+4}=0$
2. $\frac{-x+3}{x-1}=2$
3. $\frac{-2x+3}{x-4}\geqslant 0$