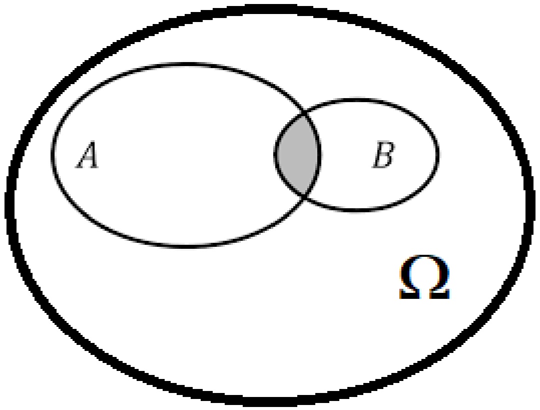
Théorie des ensembles – Logique – Fiche de cours

1. Notions d'ensemble

a. Diagramme de Venn

Un ensemble fini de nombres peut être représenté par un diagramme de Venn

Le nombre d'éléments d'un ensemble est appelé cardinal : ex : $card(A)$



b. Description avec une liste d'éléments

Un ensemble de nombres peut être décrit par une liste d'éléments ; ex : $A=\{1;2;10\}$

c. Description avec un intervalle

Un ensemble de nombres peut être décrit par un intervalle : ex $A=[1;2]$

d. Autres ensembles

Les droites, les cercles, les plans sont des ensembles de points

2. Le symbole appartenance $\in$ ou $\notin$

Le symbole appartenance $\in$ ou $\notin$ est une relation entre un élément et un ensemble

Exemples :

- $4\in\mathbb{R}$
- $M(1;3)\notin\ d:y=2x-1$

3. Le symbole inclusion $\subset$ ou $\not\subset$

Le symbole inclusion $\subset$ ou $\not\subset$ est une relation entre un sous-ensemble et un ensemble

Exemples :

- $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$
- la droite $(AB)\not\subset$ sur le plan (ACD)

4. Le symbole intersection $\cap$

Le symbole intersection $\cap$ désigne les éléments communs à deux ensembles.

Exemple : $A\cap B$

5. Le symbole union $\cup$

Le symbole union $\cup$ désigne les éléments appartenant à l'un, à l'autre ou à deux ensembles.

Exemple : $A\cup B$

6. Les lois de de Morgan

$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$; $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

7. Proposition logique

Une proposition logique est une affirmation formée par des mots et des symboles à laquelle on veut attribuer la valeur « vrai » ou la valeur « faux ».

Exemple : « 2 » est un nombre pair : proposition vraie
« 5 » est un diviseur de 4 : proposition fausse

8. Négation d'une proposition logique

La négation consiste à affirmer le contraire d'une proposition logique (nier son existence).

9. Connecteurs logiques « et » « ou »

- connecteur logique « et »

Soit P et Q deux propositions ; la proposition « P et Q » est vraie si les 2 propositions P et Q sont vraies simultanément.

- connecteur logique « ou »

Soit P et Q deux propositions ; la proposition « P ou Q » est vraie si au moins l'une des 2 propositions P et Q sont vraies.

10. Négation de (P et Q) et de (P ou Q)

- négation de (P et Q)

La négation de (P et Q) = négation de (P) ou négation de (Q)

- négation de (P ou Q)

La négation de (P ou Q) = négation de (P) et négation de (Q)

11. Condition nécessaire et suffisante

Lorsque la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie
P est la condition nécessaire pour Q
Q est une condition suffisante pour P

12. Implication, réciproque, équivalence

- implication

La proposition « si P alors Q » est appelée implication
On peut utiliser la notation : $P \Rightarrow Q$

- réciproque

La proposition réciproque de « si P alors Q » est « si Q alors P »
On peut utiliser la notation : $Q \Rightarrow P$

- équivalence

La proposition P si et seulement si Q (ou P est équivalent à Q) est la proposition : « si $P \Rightarrow Q$ » et « si $Q \Rightarrow P$ »
On peut utiliser la notation $P \Leftrightarrow Q$ ou l'expression P si et seulement si Q

13. Les quantificateurs

- universel

Le quantificateur universel est « quelque que soit, pour tout » noté $\forall$

- existentiel

Le quantificateur existentiel est « il existe » noté $\exists$

14. Les raisonnements

- raisonnement direct
- implication

Pour établir si « $P \Rightarrow Q$ » est vraie on suppose que P est vraie et on démontre que Q est vraie

- réciproque

Pour établir si « $Q \Rightarrow P$ » est vraie on suppose que Q est vraie et on démontre que P est vraie

- équivalence

Pour établir si « P $\Leftrightarrow$ Q » est vraie on doit démontrer P $\Rightarrow$ Q est vraie et Q $\Rightarrow$ P est vraie.

- disjonction des cas

On démontre une propriété en séparant et en étudiant tous les cas.

Exemple : la parité, étude des cas d'une valeur absolue

- contraposée

On peut montrer que P $\Rightarrow$ Q est vraie avec un raisonnement par contraposée : « si non (Q) $\Rightarrow$ non (P) » est vraie.

- raisonnement par l'absurde

Pour montrer que P $\Rightarrow$ Q est vraie on suppose que P $\Rightarrow$ non(Q) est vraie et on recherche l'existence d'au moins une contradiction.