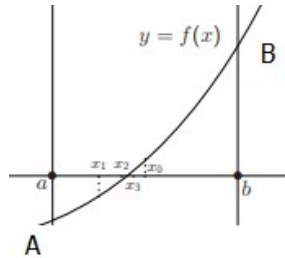


# Méthodes numériques – Fiche de cours

## 1. Résolution d'équations

On suppose que l'équation  $f(x)=0$  définie sur  $[a;b]$  a pour solution  $x=\alpha$  ; on construit une suite  $(x_n)$  convergent plus ou moins rapidement vers  $\alpha$  selon la méthode utilisée

### a. Méthode de dichotomie

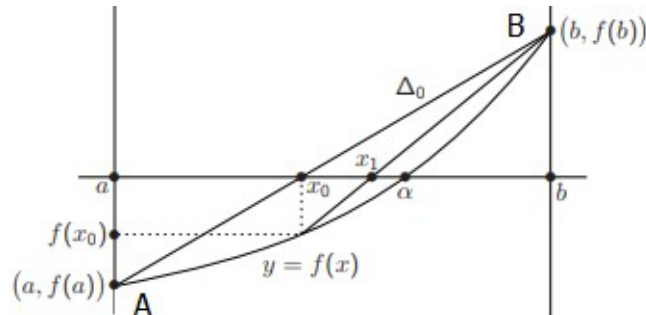


#### Algorithme

- On calcule  $x_{n+1} = \frac{a+b}{2}$  abscisse du milieu de  $[AB]$
- si  $f(a) \cdot f(x_{n+1}) < 0$  alors  $\alpha \in [a; x_{n+1}]$  (avec  $b = x_{n+1}$ )  
sinon  $\alpha \in [x_{n+1}; b]$  (avec  $a = x_{n+1}$ )
- on réitère la méthode jusqu'à ce que  $|x_{n+1} - x_n| \leq \epsilon$

Vitesse de convergence : pas très rapide

### b. Méthode de Lagrange (sécante)

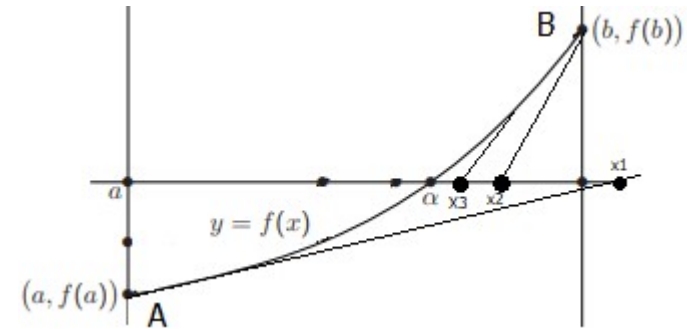


#### Algorithme

- On calcule  $x_{n+1} = \frac{x_n \cdot f(b) - b \cdot f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}$  abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses avec la sécante  $[AB]$
- on réitère la méthode jusqu'à ce que  $|x_{n+1} - x_n| \leq \epsilon$

Vitesse de convergence : assez rapide

### c. Méthode de Newton (tangente)



#### Algorithme

- On calcule  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$  abscisse du point d'intersection de la tangente l'axe des abscisses
- on réitère la méthode jusqu'à ce que  $|x_{n+1} - x_n| \leq \epsilon$

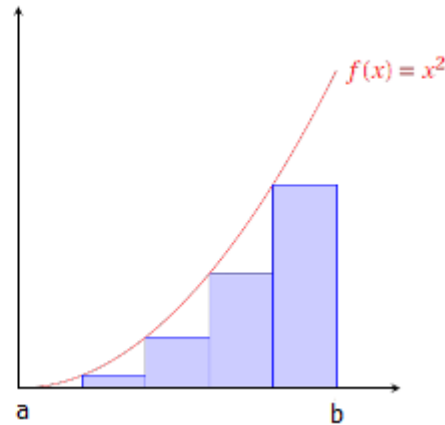
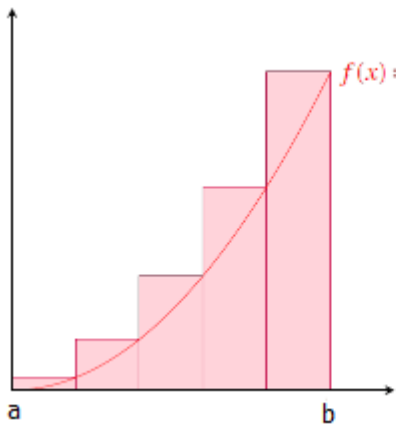
Vitesse de convergence : rapide

## 2. Intégration

On recherche une estimation de  $\int_a^b f(x) dx$

### a. Méthode des rectangles (gauche ou droite)

On calcule la surface des rectangles supérieurs et inférieurs et on procède à un encadrement de  $\int_a^b f(x) dx$



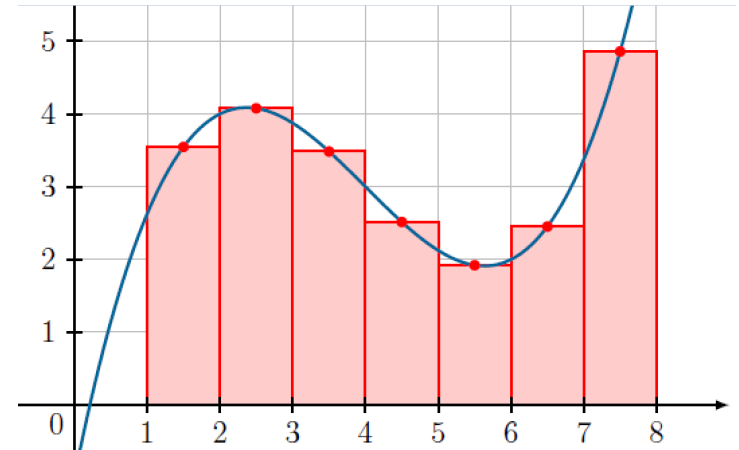
#### Algorithme

- on définit la largeur d'un rectangle  $largeur = \frac{b-a}{n}$  en fonction du nombre  $n$  de sous-divisions
- rectangles gauches : on définit  $x_{k+1} = largeur \cdot (k+1)$  ; on calcule tous les  $f(x_{k+1})$  ; on calcule  $S_{k+1} = f(x_{k+1}) \cdot largeur$
- rectangles droites : on définit  $x_k = largeur \cdot k$  ; on calcule tous les  $f(x_k)$  ; on calcule  $S_k = f(x_k) \cdot largeur$
- on ajoute les surfaces  $S_k$

Précision : pas très précis

### b. Méthode des milieux

On calcule la surface des rectangles centrés sur  $x_k = largeur \cdot k$



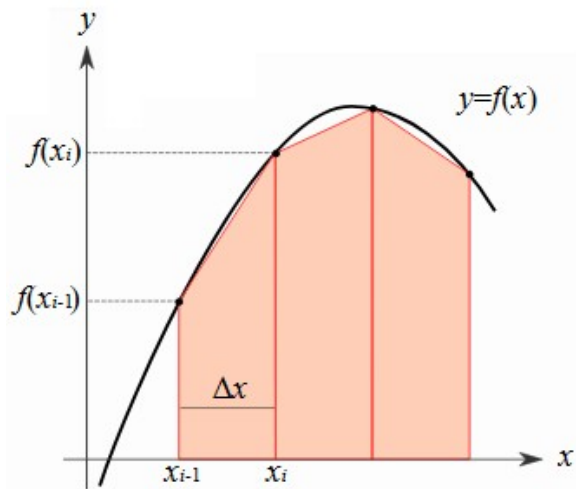
#### Algorithme

- on définit la largeur d'un rectangle  $largeur = \frac{b-a}{n}$  en fonction du nombre  $n$  de sous-divisions
- on définit ;  $x_k = largeur \cdot \frac{2k+1}{2}$  on calcule tous les  $f(x_k)$
- on calcule  $S_k = f(x_k) \cdot largeur$
- on ajoute les surfaces  $S_k$

Précision : assez précis

### c. Méthode des trapèzes

On calcule la surface des trapèzes compris entre  $x_k = largeur \cdot k$  et  $x_{k+1} = largeur \cdot (k+1)$



#### Algorithme

- on définit la largeur d'un trapèze  $largeur = \frac{b-a}{n}$  en fonction du nombre  $n$  de sous-divisions
- on définit  $x_k = largeur \cdot k$  et  $x_{k+1} = largeur \cdot (k+1)$
- on calcule tous les  $f(x_k)$  et  $f(x_{k+1})$
- on applique  $S_k = \frac{(f(x_k) + f(x_{k+1}))}{2} \cdot largeur$
- on ajoute les surfaces  $S_k$

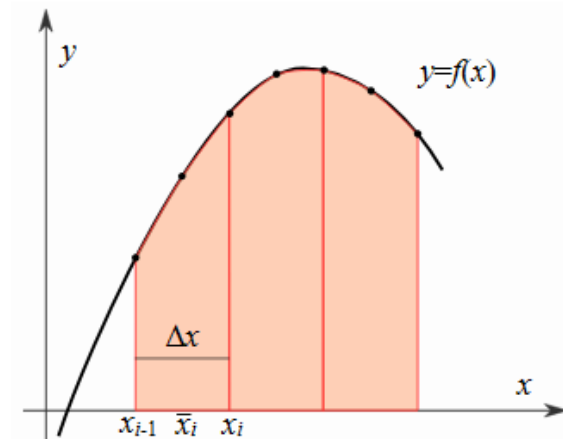
Précision : assez précis

### d. Méthode de Simpson

On interpole la fonction à intégrer par un polynôme du second degré

On utilise la formule de Simpson : la surface entre  $x_k$  et  $x_{k+1}$  vaut :

$$S_k = \frac{x_{k+1} - x_k}{6} \cdot \left( f(x_k) + 4 \cdot f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) + f(x_{k+1}) \right)$$



#### Algorithme

- on définit la largeur d'un intervalle  $largeur = \frac{b-a}{n}$  en fonction du nombre  $n$  de sous-divisions
- on définit ; on  $x_k = largeur \cdot k$  et  $x_{k+1} = largeur \cdot (k+1)$
- on calcule  $S_k = \frac{1}{6} \cdot \left( f(x_k) + 4 \cdot f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) + f(x_{k+1}) \right) \cdot largeur$
- on ajoute les surfaces  $S_k$

Précision : précis

### 3. Régression linéaire statistique

#### a. Coefficient de corrélation

On définit le coefficient de corrélation de X et Y par :

$$r = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)} \quad -1 \leq r \leq 1$$

#### b. Equation de la droite de régression

On définit une série statistique double en observant deux critères sur une même population de dimension n :

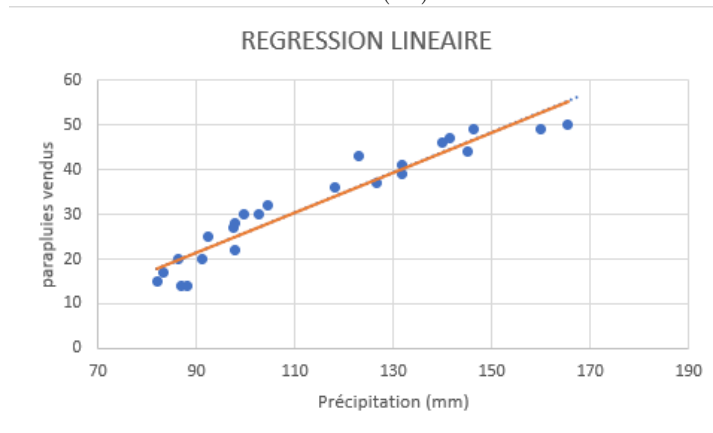
$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

Valeur $x_i$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
Valeur $y_i$	$y_1$	$y_2$	...	$y_n$

L'ensemble des points de coordonnées  $(x_i, y_i)$ , rapportés dans un repère, forme le nuage de points de la série  $(x, y)$ .

La droite de régression linéaire par la méthode des moindres carrés a pour expression :

$$y = ax + b \quad \text{avec} \quad a = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\text{var}(X)} \quad \text{et} \quad b = \bar{y} - a\bar{x}$$



#### Algorithme

- lire les données  $X$  et  $Y$  dans un fichier
- définir les fonctions  $V(X)$ ,  $M(X)$ ,  $M(Y)$  et  $COV(X, Y)$
- déterminer la valeur du coefficient de corrélation et estimer si le modèle linéaire est adapté
- tabuler  $Z$  ordonnées des points appartenant à la droite de régression
- afficher le résultat

Précision : précis lorsque  $|r| > 0,9$

### 4. Résolution d'équations différentielles

On souhaite résoudre graphiquement l'équation différentielle :

$$a \cdot f'(x) + b \cdot f(x) = c$$

#### a. Méthode d'Euler explicite

On utilise le terme  $f'(t_k) \approx f'(t)$

#### Algorithme

- on définit le pas  $\Delta t$  et l'on discrétise la variable  $t_k = k \cdot \Delta t$
- on détermine  $f'(t_k) = \frac{c - b \cdot f(t_k)}{a}$
- on calcule  $f(t_{k+1}) = f(t_k) + \Delta t \cdot f'(t_k)$
- on représente graphiquement la solution  $f(t)$

Précision : pas très précis

### b. Méthode d'Euler implicite

On utilise le terme  $f'(t_{k+1}) \approx f'(t)$

#### Algorithme

- on définit le pas  $\Delta t$  et l'on discrétise la variable  $t_k = k \cdot \Delta t$
- on détermine  $f'(t_{k+1}) = \frac{c - b \cdot f(t_{k+1})}{a}$
- on calcule  $f(t_{k+1}) = f(t_k) + \Delta t \cdot f'(t_{k+1})$
- on représente graphiquement la solution  $f(t)$

Précision : pas très précis

### c. Méthode de Range Kutta d'ordre 2

On utilise le terme  $\frac{f'(t_k) + f'(t_{k+1}))}{2} \approx f'(t)$

#### Algorithme

- on définit le pas  $\Delta t$  et l'on discrétise la variable  $t_k = k \cdot \Delta t$
- on détermine  $f'(t_{k+1/2}) = \frac{1}{2}(f'(t_k) + f'(t_{k+1}))$
- on calcule  $f(t_{k+1}) = f(t_k) + \Delta t \cdot f'(t_{k+1/2})$
- on représente graphiquement la solution  $f(t)$

Précision : précis