

Les applications linéaires – Fiche de cours

1. Définition

Soient E et F 2 sev de $\mathbb{R}$ et f une application de E vers F

f est une application linéaire ssi :

$$\forall u, v \in E, \forall a, b \in \mathbb{R} \quad f(au + bv) = a \cdot f(u) + b \cdot f(v)$$

2. Propriétés

- $f(u+v) = f(u) + f(v)$ et $f(ax) = af(x)$
- si f est bijective l'application linéaire est appelée isomorphisme de E dans F
- si $E = F$ l'application linéaire est appelée endomorphisme de E dans E
- si $E = F$ et f est bijective l'application linéaire est appelée automorphisme de E dans E
- Le noyau de l'application linéaire f est défini par :
$$\text{Ker } f \in E \text{ avec } \text{Ker } f = \{x \in E, f(x) = 0\}$$
- L'image de l'application linéaire f est définie par :
$$\text{Im } f \in E \text{ avec } \text{Im } f = \{f(x), x \in E\}$$
- f est injective ssi $\text{Ker } f = \{0_E\}$
- f est surjective ssi $\text{Im } f = F$

3. Applications linéaires particulières

a. Projecteur

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E

Le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2 est un endomorphisme

$$p: \begin{aligned} E &= E_1 \oplus E_2 \rightarrow E \\ x &= x_1 + x_2 \rightarrow x_1 \end{aligned}$$

Le projecteur sur E_2 parallèlement à E_1 est un endomorphisme

$$p: \begin{aligned} E &= E_1 \oplus E_2 \rightarrow E \\ x &= x_1 + x_2 \rightarrow x_2 \end{aligned}$$

Propriétés :

- $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p \circ p = p$
- $\text{Im}(p) = E_1$ et $\text{Ker}(p) = E_2$
- si $x \in E_1 \Leftrightarrow p(x) = x$

b. Symétrie

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E

La symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2 est un endomorphisme

$$s: \begin{aligned} E &= E_1 \oplus E_2 \rightarrow E \\ x &= x_1 + x_2 \rightarrow x_1 - x_2 \end{aligned}$$

La symétrie par rapport à E_2 parallèlement à E_1 est un endomorphisme

$$s: \begin{aligned} E &= E_1 \oplus E_2 \rightarrow E \\ x &= x_1 + x_2 \rightarrow x_2 - x_1 \end{aligned}$$

Propriétés :

- $s \circ s = Id_E$ et $s^{-1} = s$
- $\text{Im}(s) = E$ et $\text{Ker}(s) = \{0_E\}$
- si $x \in E_1 \Leftrightarrow s(x) = x$; si $x \in E_2 \Leftrightarrow s(x) = -x$