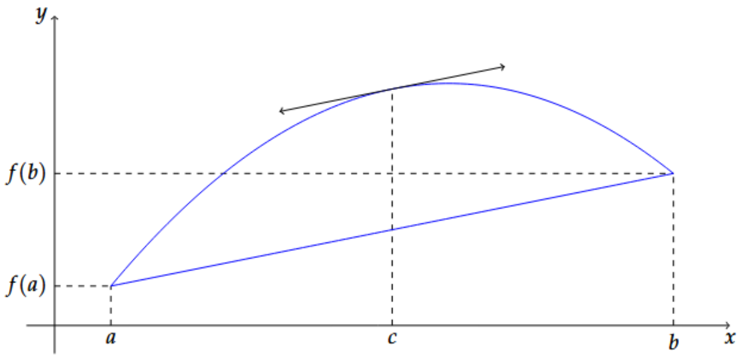
Calcul différentiel – Fiche de cours

1. Accroissements finis

a. Théorème des accroissements finis

Soit $f(x)$ continue sur $[a;b] \subset \mathbb{R}$ et dérivable sur $]a;b[$ alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



b. Inégalité des accroissements finis

Soit f est continue sur $[a;b] \subset \mathbb{R}$ et dérivable sur $]a;b[$ avec $|f'(x)| \leq M$ alors $-M \leq \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq M$

2. Théorème de Rolles

Soit $f(x)$ continue sur $[a;b] \subset \mathbb{R}$ et dérivable sur $]a;b[$ avec $f(a)=f(b)$ alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c)=0$

3. Développements limités

a. Formule de Taylor-Young

Soit $f(x)$ continue sur $[a;b] \subset \mathbb{R}$ et dérivable n fois sur $]a;b[$ alors :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + o_0(h^n).$$

b. Développements limités usuels au voisinage de 0

$$\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} 1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n (n!)} x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^n 1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n (n!)} x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{(1+x)^k} = 1 - k\,x + \frac{k(k+1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^n k(k+1)\cdots(k+n-1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

c. <u>Application des développements limités</u>

Trouver l'équivalent d'une fonction au voisinage d'un point :

- pour résoudre des limites
- simplifier les expressions et résoudre des équations