

# Dénombrement – Exercices – Devoirs

## Exercice 1

On considère un groupe de  $n$  personnes. Quelle est la probabilité que deux d'entre elles aient le même jour d'anniversaire ?

(On suppose qu'il n'y a pas d'années bissextiles)

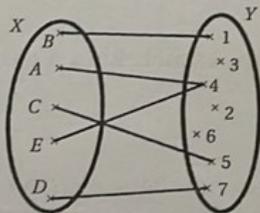
## Exercice 2

Un savant possède 22 livres dans son bureau, 12 livres de maths et 10 livres de physique. Il souhaite ranger ses livres sur une étagère.

1. Combien y a-t-il de rangements possibles s'il souhaite ranger ses livres de façon à ce que les livres de maths soient groupés ensemble et les livres de physique ensemble?
2. Combien y a-t-il de rangements possibles si la seule chose qui compte est que les livres de maths soient groupés ensemble ?

## Exercice 3

On joint chaque lettre de l'ensemble A à l'un quelconque des chiffres de l'ensemble B.



Combien y a-t-il de liaisons possibles dans chaque cas :

1. deux lettres distinctes sont reliées à des chiffres distincts ;
2. des lettres distinctes peuvent être reliées au même chiffre.

## Exercice 4

Lors d'une loterie de Noël, 300 billets sont vendus aux enfants de l'école ; 4 billets sont gagnants. J'achète 10 billets, quelle est la probabilité pour que je gagne au moins un lot ?

## Exercice 5

Soient  $n, p \in \mathbb{N}$  tels que  $p \leq n$ .

1. Montrer que  $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ .
2. Montrer que  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ .
3. Montrer que  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = 0$ .
4. Montrer que  $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$ , par le calcul.

## Exercice 6

Un joueur de poker reçoit une main de 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité qu'il reçoive :

1. une seule paire (deux cartes de même hauteur) ;
2. deux paires ;
3. un brelan (trois cartes de même hauteur et pas de paire ni de carré) ;
4. un carré (quatre cartes de même hauteur) ;
5. un full (une paire et un brelan) ?

## Exercice 7

On constitue un comité de 8 personnes choisies parmi 15 femmes et 12 hommes.

1. Combien y a-t-il de comités possibles ?
2. Même question si le comité contient 4 hommes et 4 femmes.
3. Même question si le comité compte au moins 2 femmes.

## Exercice 8

Soit  $n \geq 1$  un entier. Calculer

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}.$$

## Exercice 9

Une urne contient 8 boules numérotées de 1 à 8. On tire 4 fois de suite une boule avec remise (c'est-à-dire qu'on remet la boule dans l'urne après chaque tirage).

1. Quel est l'univers  $\Omega$  de cette expérience? Quel est son cardinal?
2. Déterminer les probabilités d'obtenir.
  - (a) Au moins une fois le nombre 3.
  - (b) Au moins deux fois le nombre 4.
  - (c) Quatre nombres différents.
  - (d) Quatre nombres dans un ordre strictement croissant.

## Exercice 10

1. De combien de façons 2 personnes peuvent-elles occuper 6 sièges alignés? en cercle?
2. De combien de façons peut-on placer 18 personnes autour d'une table ronde?
3. Les initiales d'une personne sont le couple formé par la première lettre de son prénom et la première lettre de son nom.  
Montrer que, dans un village d'au moins 677 habitants, il existe toujours deux personnes ayant les mêmes initiales.
4. Combien d'équipes de basket (5 joueurs) peut-on former avec les 35 élèves d'une classe?

## Exercice 11

Pour entrer dans son immeuble Math doit composer un code à 5 caractères sur un clavier composé des dix chiffres et des lettres A et B.

1. Combien y a-t-il de codes composés de 4 chiffres puis d'une lettre.
2. Combien y a-t-il de codes composés de 4 chiffres et d'une lettre (non nécessairement à la fin).
3. Les chiffres 3 et 8 ne fonctionnent plus, combien y a-t-il de codes composés de 3 chiffres et de 2 lettres.

## Exercice 12

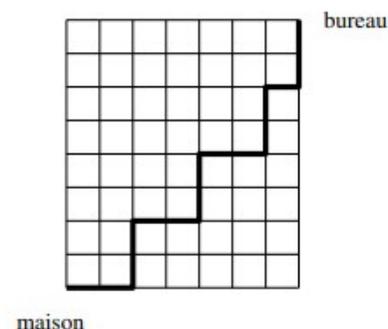
Un Q.C.M. est constitué de 8 questions. Pour chacune d'elles, 4 réponses sont proposées dont une seule est exacte.

Un candidat répond au hasard.

1. Déterminer le nombre de réponses possibles à ce Q.C.M.
2. a. Déterminer le nombre de cas où les réponses du candidat aux 6 premières questions sont exactes et aux deux autres fausses.  
b. Déterminer le nombre de cas où le candidat répond correctement à 6 questions.
3. Déterminer le nombre de cas où le candidat donne au moins 6 réponses exactes.
4. Le candidat est reçu s'il donne au-moins 6 réponses exactes. Quelle est la probabilité qu'il soit reçu en répondant au hasard?

## Exercice 13

Un homme travaille à Manhattan, dans un quartier où les avenues sont orientées nord-sud et les rues est-ouest. Il travaille à 7 pâtés de maison à l'est et 8 pâtés de maisons au nord de son domicile. Pour aller à son travail chaque jour il parcourt donc la longueur de 15 pâtés de maison (il ne se dirige ni vers le sud, ni vers l'ouest). On suppose qu'il existe une voie le long de chaque pâté de maisons et qu'il peut prendre n'importe lesquelles de ce schéma rectangulaire. La figure ci-dessous illustre la situation; un exemple de trajet est représenté en ligne grasse.



1. Proposer un codage permettant de décrire le trajet représenté.
2. Combien de trajets différents l'homme peut-il emprunter?

## Exercice 14

Combien y a-t-il de surjections de  $[1, n+1]$  sur  $[1, n]$ ?

## **Exercice 15**

Soit  $(P)$  un polygone convexe à  $n$  sommets. Combien ce polygone a-t-il de diagonales? En combien de points distincts des sommets se coupent-elles au maximum?

## **Exercice 16**

Soit  $P_n^k$  le nombre de partitions d'un ensemble à  $n$  éléments en  $k$  classes.

Montrer que  $P_n^k = P_{n-1}^{k-1} + kP_{n-1}^k$  pour  $2 \leq k \leq n-1$ .

Dresser un tableau pour  $1 \leq k, n \leq 5$ .

Calculer en fonction de  $P_n^k$  le nombre de surjections d'un ensemble à  $n$  éléments sur un ensemble à  $p$  éléments.

## **Exercice 17**

Soit  $E$  un ensemble fini à  $n$  éléments ( $n \in \mathbb{N}^*$ ). Combien y-a-t-il de couples  $(X, Y) \in (\mathcal{P}(E))^2$  tels que  $X \subset Y$ ?

## **Exercice 18**

Soit  $E$  un ensemble fini à  $n$  éléments ( $n \in \mathbb{N}^*$ ). Calculer  $S_1 = \sum_{(X,Y) \in (\mathcal{P}(E))^2} \text{card}(X \cap Y)$  et  $S_2 = \sum_{(X,Y) \in (\mathcal{P}(E))^2} \text{card}(X \cup Y)$ .

## **Exercice 19**

Combien l'équation  $x_1 + x_2 + x_3 = 15$  a-t-elle de solutions entières et non négatives?

## **Exercice 20**

Combien y a-t-il de nombres de 5 chiffres où 0 figure une fois et une seule?

## **Exercice 21**

On joue au loto en cochant dans une grille 6 numéros parmi les numéros 1, 2, ..., 49. On place ensuite 49 boules numérotées de 1 à 49 dans une urne et on en extrait 6. On obtient ainsi les numéros gagnants.

- 1) Combien y-a-t-il de tirages possibles?
- 2) Combien de tirages nous fournissent exactement 1 numéro gagnant?
- 3) Combien de tirages nous fournissent exactement 2, 3, 4, 5, 6 numéros gagnants?

## **Exercice 22**

Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot ELEVE? :

Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot MATHEMATIQUES?