Equations différentielles – Exercices - Devoirs

Exercice 1

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $2y' + 3y = 0$ et $y(2) = 1$. **2.** $5y' - 2y = 0$ et $y(5) = e$.

Exercice 2

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$3y' - y = 4\sin(x) \quad \text{avec} \quad y(0) = 1$$

Exercice 3

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$10y' + 4y = \sin(x) - \cos(x) \quad \text{avec} \quad y(0) = 1$$

Exercice 4

On considère l'équation différentielle suivante : $3\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t) - f(t) = 0$.
Parmi les propositions suivantes, choisir celles qui sont exactes et celles qui sont fausses.

A. L'équation caractéristique associée est $3re^{rt} - e^{rt} = 0$.

B. $1/3$ est racine de l'équation caractéristique.

C. 3 est racine de l'équation caractéristique.

D. La solution générale de l'équation différentielle s'écrit $f(t) = e^{3t}$.

E. La solution générale de l'équation différentielle s'écrit $f(t) = Ke^{t/3}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

Exercice 5

On considère l'équation différentielle suivante : $2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) - 5f(x) = 3$.
Parmi les propositions suivantes, choisir celles qui sont exactes et celles qui sont fausses.

A. La solution de l'équation homogène associée s'écrit $f_{\mathrm{H}}(x) = Ke^{5x/2}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

B. La solution générale de l'équation différentielle avec second membre s'écrit $f(x) = K_1 e^{5x/2} + K_2$ avec K_1 et $K_2 \in \mathbb{R}$.

C. Une solution particulière de l'équation différentielle est $f_{\mathrm{P}}(x) = -3/5$.

D. L'équation homogène associée est $2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) - 5f(x) = 0$.

E. L'équation caractéristique associée est $2 - 5r = 0$.

Exercice 6

On considère l'équation différentielle suivante : $-\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) + 2f(x) = \sin(2x)$.
Parmi les propositions suivantes, choisir celles qui sont exactes et celles qui sont fausses.

A. L'équation caractéristique associée est $r - 2 = 0$.

B. La solution de l'équation homogène associée s'écrit $f_{\mathrm{H}}(x) = Ke^{-2x}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

C. Une solution particulière de l'équation différentielle est $f_{\mathrm{P}}(x) = \frac{1}{4}\sin(2x)$.

D. Une solution particulière de l'équation différentielle est $f_{\mathrm{P}}(x) = \frac{1}{4}[\cos(2x) + \sin(2x)]$.

E. La solution générale de l'équation différentielle s'écrit $f(x) = Ke^{2x} + \frac{\sin(2x) + \cos(2x)}{4}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

Exercice 7

On considère l'équation différentielle suivante : $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t) + 3f(t) = 4$.
Parmi les propositions suivantes, choisir celles qui sont exactes et celles qui sont fausses.

A. L'unique solution qui vérifie l'équation différentielle et la condition initiale $f(0) = 0$ vaut $f(t) = 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

B. L'unique solution qui vérifie l'équation différentielle et la condition initiale $f(0) = 1/3$ vaut
$$f(t) = e^{-3t} - 4/3$$

C. L'unique solution qui vérifie l'équation différentielle et la condition initiale $f(0) = 0$ vaut
$$f(t) = \frac{4}{3}(1 - e^{-3t})$$

D. L'unique solution qui vérifie l'équation différentielle et la condition initiale $f(0) = 1/3$ vaut
$$f(t) = -e^{-3t} + 4/3$$

E. L'unique solution qui vérifie l'équation différentielle et la condition initiale $f(0) = 1/3$ vaut $f(t) = 1/3$.

Exercice 8

On considère les 2 équations différentielles et les 2 conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}t}(t) + f_1(t) = 1 \\ \frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}t}(t) + f_2(t) = -1 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} f_1(0) = 0 \\ f_2(0) = 0 \end{cases}$$

Parmi les propositions suivantes, choisir celles qui sont exactes et celles qui sont fausses.

A. $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$ est solution de $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t) + f(t) = 0$

B. $f_1(t) = 1 - \exp(-t)$

C. $f_2(t) = -1 + \exp(-t)$

D. $f_1(t) - f_2(t) = \exp(-t)$

E. $f_1(t) + f_2(t) = 0$

Exercice 9

On considère l'équations différentielle et la condition initiale suivantes :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t) = 1 \quad , \quad f(0) = 1$$

Parmi les propositions suivantes, choisir celles qui sont exactes et celles qui sont fausses.

A. $f(t) = \exp(t)$

B. $f(t) = 1$

C. $f(t) = t + 1$

D. $f(t) = -t + 1$

E. $f(t) = \exp(-t)$

Exercice 10

On considère l'équation différentielle

$$(E) : \quad y'' - 4y' + 13y = -39$$

où y est une fonction inconnue de la variable x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Déterminer une fonction constante g, solution de l'équation (E).
2. Ecrire l'équation sans second membre (E_0) associée à (E), et son équation caractéristique. Résoudre cette équation et en déduire les solutions y_0 de (E_0).
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).
4. On donne $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$; déterminer l'unique solution f(x)

Exercice 11

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y + 2\frac{dy}{dx} = \cos x$ avec $y(0) = 5$
2. $\frac{dy}{dx} - 2\frac{d^2y}{dx^2} + y = \cos x$ avec $y(0) = \frac{3}{10}$; $y'(0) = \frac{11}{10}$
3. $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = \cos 2x$ avec $y(0) = 3$ et $y'(0) = 0$

Exercice 11

On considère l'équation différentielle

(E) $$y'' + 2y' + y = 1$$

où y désigne une fonction de la variable x, définie et deux fois dérivable sur $[0, +\infty[$.

1. Démontrer que la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = 1$ est une solution de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle

   (E_0) $$y'' + 2y' + y = 0$$

3. Déduire des questions précédentes la résolution de l'équation (E).
4. Déterminer la solution particulière de l'équation (E) qui vérifie

$$f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad f'(0) = 3.$$

Exercice 12

On considère l'équation différentielle suivante : $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}(t) - 3\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t) - 10f(t) = 0.$

Parmi les propositions suivantes, choisir celles qui sont exactes et celles qui sont fausses.

A. $3/2$ et $7/2$ sont les racines de l'équation caractéristique associée.

B. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r - 10 = 0$.

C. La solution générale de l'équation différentielle s'écrit $f(t) = C_1 e^{5t} + C_2 e^{-2t}$ avec C_1 et C_2 deux constantes quelconques.

D. La solution générale de l'équation différentielle s'écrit $f(t) = 0 \forall t \in \mathbb{R}$.

E. La solution générale de l'équation différentielle s'écrit $f(t) = e^{3t/2}\left[A\cos(7t/2) + B\sin(7t/2)\right]$ avec A et B deux constantes quelconques.

Exercice 13

On considère l'équation différentielle suivante : $4\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) - 4\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) + f(x) = 0.$

Parmi les propositions suivantes, choisir celles qui sont exactes et celles qui sont fausses.

A. $1/2$ est la racine double de l'équation caractéristique associée.

B. $(1+\sqrt{2})/2$ et $(1-\sqrt{2})/2$ sont les racines de l'équation caractéristique associée.

C. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 4r + 4 = 0$.

D. La solution générale de l'équation différentielle s'écrit $f(x) = (C_1 x + C_2)e^{x/2}$ avec C_1 et C_2 deux constantes quelconques.

E. La solution générale de l'équation différentielle s'écrit $f(x) = \exp\left(\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}x\right) - \exp\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}x\right)$.

Exercice 14

On considère l'équation différentielle suivante : $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) + 2\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) + 2f(x) = 0.$

Parmi les propositions suivantes, choisir celles qui sont exactes et celles qui sont fausses.

A. $-1+\sqrt{3}$ et $1+\sqrt{3}$ sont les racines de l'équation caractéristique associée.

B. $-1+i$ et $-1-i$ sont les racines de l'équation caractéristique associée.

C. -1 est la racine double de l'équation caractéristique associée.

D. La solution générale de l'équation différentielle s'écrit $f(x) = A\cos x + B\sin x$ avec A et B deux constantes quelconques.

E. La solution générale de l'équation différentielle s'écrit $f(x) = Ke^{-x}$ avec K une constante quelconque.

Exercice 15

On s'intéresse aux solutions de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}(t)+9f(t)=1$ qui vérifient les deux conditions initiales $f(0)=\frac{1}{9}$ et $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(0)=3$.

Parmi les propositions suivantes, choisir celles qui sont exactes et celles qui sont fausses.

A. $f(t)=\cos(3t)-\frac{8}{9}$.

B. $f(t)=\sin(3t)+\frac{1}{9}$.

C. $f(t)=A\cos(3t)+B\sin(3t)$ avec A et B deux réels quelconques.

D. $f(t)=\frac{1}{9}$.

E. Il n'existe qu'une seule solution.

Exercice 16

On considère les 2 équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2 f_1}{\mathrm{d}t^2}(t)+\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}t}(t) = 0 & \text{(I)} \\ \frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}t}(t)+f_2(t) = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Parmi les propositions suivantes, choisir celles qui sont exactes et celles qui sont fausses.

A. On a $f_2(t)=K\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}t}(t)$ avec K une constante quelconque.

B. L'équation caractéristique associée à (I) est $r^2+r=0$.

C. L'équation caractéristique associée à (II) est $r+1=0$.

D. La solution générale de (I) s'écrit $f_1(t)=A+Be^{-t}$ avec A et B deux constantes quelconques.

E. La solution générale de (II) s'écrit $f_2(t)=Ce^{-t}$ avec C une constante quelconque.

Exercice 17

On considère les 2 équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2 f_1}{\mathrm{d}t^2}(t)+\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}t}(t) = 0 & \text{(I)} \\ \frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}t}(t)+f_2(t) = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Parmi les propositions suivantes, choisir celles qui sont exactes et celles qui sont fausses.

A. On a $f_2(t)=K\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}t}(t)$ avec K une constante quelconque.

B. L'équation caractéristique associée à (I) est $r^2+r=0$.

C. L'équation caractéristique associée à (II) est $r+1=0$.

D. La solution générale de (I) s'écrit $f_1(t)=A+Be^{-t}$ avec A et B deux constantes quelconques.

E. La solution générale de (II) s'écrit $f_2(t)=Ce^{-t}$ avec C une constante quelconque.