Les espaces vectoriels – Fiche de cours

1. Définition

On appelle K l'ensemble des nombres rationnels, réels ou complexes
Un espace vectoriel est un ensemble E non vide muni de :

- une loi de composition interne :

$$E \times E \to E$$
$$(u, v) \to u+v$$

- une loi de composition externe :

$$K \times E \to E$$
$$(\lambda, v) \to \lambda u$$

et vérifiant les propriétés suivantes :

Axiomes de la loi interne

1. commutativité : $\forall (u,v) \in E^2 \quad u+v=v+u$
2. associativité : $\forall (u,v,w) \in E^3 \quad u+(v+w)=(u+v)+w$
3. élément neutre : $\exists 0_E \in E$
4. symétrique ou opposé : $\forall u \in E \ \exists u' \in E \quad u+u'=0_E$

Axiomes de la loi externe

5. neutre : $\exists 1_E \in K \quad 1_E \cdot u=u$
6. factorisation scalaire : $\forall (\lambda, \mu) \in K^2 \quad \forall u \in E \quad \lambda(\mu \cdot u)=(\lambda \cdot \mu) \cdot u$

Axiomes des lois interne et externe

7. distributivité vectorielle : $\forall \lambda \in K \quad \forall (u,v) \in E \times E \quad \lambda(u+v)=\lambda \cdot u+\lambda \cdot v$
8. distributivité scalaire : $\forall (\lambda, \mu) \in K^2 \quad \forall u \in E \quad (\lambda+\mu) u=\lambda \cdot u+\mu \cdot u$

2. Sous-espace vectoriel

a. Définition

Soit E un K-espace vectoriel.
Une partie F de E est un sous-espace vectoriel si :

- $0_E \in F$
- $\forall (u,v) \in F^2 \quad \forall (a,b) \in K^2 \quad a \cdot u+b \cdot v \in F$

b. Propriété

Soient E un K-espace vectoriel et F un sous-espace de E
F est un K-espace vectoriel pour les lois induites par E

c. Combinaison linéaire

Soit E un espace vectoriel composé des vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ ... $\vec{u}_n$ et λ_1, λ_2 ... λ_n des éléments de l'ensemble K
Une combinaison linéaire de E est définie par :

$$\vec{v}=\lambda_1 \vec{u}_1+\lambda_2 \vec{u}_2+\ldots+\lambda_n \vec{u}_n$$

d. Sous espace vectoriel Vect

Soit F une famille de vecteurs; le plus petit sous-espace vectoriel contenant tous les vecteurs d'une famille de vecteurs est appelé sous-espace vectoriel engendré ; il est noté :

$$Vect\ A=\{u_1; u_2 \ldots; u_n\}$$

3. Familles de vecteurs, bases et dimension

a. Famille libre

Soit F une famille de vecteurs $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ ... $\vec{u_n}$ et λ_1 , λ_2 ... λ_n des éléments de l'ensemble K

Une famille de vecteurs est libre lorsque :

$$\lambda_1 \vec{u_1} + \lambda_2 \vec{u_2} + \ldots + \lambda_n \vec{u_n} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0 , \lambda_2 = 0 , \ldots \lambda_n = 0$$

b. Dimension

La dimension d'un espace vectoriel est définie par :

- le nombre de vecteurs permettant d'exprimer les coordonnées d'un élément dans cet espace
- le nombre de coordonnées non liées pour les vecteurs et matrices
- le nombre de coefficients non liés pour un polynôme
- 1 pour les droites vectorielles
- 2 pour les plans vectoriels

Soit F un sev de E alors $dim(F) \leq dim(E)$

Si F et G sont 2 sev de E avec $F \subset G$ et $dim F = dim G$ alors $F = G$

c. Famille génératrice

Soit F une famille de vecteurs $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ ... $\vec{u_n}$ et λ_1 , λ_2 ... λ_n des éléments de l'ensemble K

$rg(F)$ est le nombre de vecteurs libres sur F

Une famille F de vecteurs peut générer un espace vectoriel lorsque :

$$F \subset E \quad \text{et} \quad rg(F) \geq dim(F)$$

d. Base

Une base est une famille de vecteurs libre et génératrice

e. Base canonique

- espace $\mathbb{R}^2$ $\quad B = (e_1 , e_2)$ $\quad e_1 = (1{,}0)$ $\quad e_2 = (0{,}1)$
- espace $\mathbb{R}^3$ $\quad B = (e_1 , e_2 , e_3)$ $\quad e_1 = (1{,}0{,}0)$ $\quad e_2 = (0{,}1{,}0)$ $\quad e_3 = (0{,}0{,}1)$
- espace $\mathbb{R}_1[X]$ $\quad B = (1 , X)$
- espace $\mathbb{R}_2[X]$ $\quad B = (1 , X , X^2)$

4. Somme directe de sev, sev supplémentaires

a. Somme directe de sev

Soient F et G deux sev

La somme directe de F et G est notée $F \oplus G$

La somme de F et G est directe ssi tout élément de F+G s'écrit de manière unique comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G

Une condition nécessaire et suffisante pour démontrer que F et G sont en somme directe sur E est : $F \cap G = \{0_E\}$

b. Sev supplémentaires

Soit E un ev ; soit F et G deux sev en somme directe sur E

F et G sont des sev supplémentaires ssi :

- $F \subset E \quad G \subset E \quad F \cap G = \{0_E\}$ et $E = F \oplus G$

c. Propriété

Soit E un ev et F et G deux sev en somme directe sur E alors :

$$E = F \oplus G \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} F \cap G = \{0_E\} \\ dim F + dim G = dim E \end{Bmatrix}$$