Fonctions exponentielle et logarithme – Exercices – Devoirs

Exercice 1

1. Démontrer que $\forall x, x' \in]0;+\infty[,\ \ln(xx') = \ln(x) + \ln(x')$.
2. Démontrer ensuite que $\forall x \in]0;+\infty[, \forall n \in \mathbb{N},\ \ln(x^n) = n\ln(x)$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2\ln(x) - x^2$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Donner une interprétation graphique.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Déterminer les intervalles de convexité et de concavité de f.
5. Tracer le graphe de f et déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse $\frac{1}{e}$.

Exercice 3

Calculer les limites

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} (10x+3)e^x$,
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{6x} - e^{5x}$,
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x - xe^x + 1$,
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - xe^x + 1$,
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x+1}{e^x+4}$,
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}}$.

Exercice 4

Étudier la fonction définie par $f(x) = \ln(e^x + e^{-x} - x)$.
On s'intéressera aux droites asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 5

1. Soit $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.
   (a) Dresser le tableau de variation de f.
   (b) La fonction f est-elle injective, surjective, bijective? Justifier vos trois réponses.
2. Soit $g : \mathbb{R} \to [1,+\infty[$ la fonction définie par $g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) + f(x) = e^x$.
   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$ et $g'(x) = f(x)$.
   (c) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x)^2 - f(x)^2 = 1$.
3. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$.
   (a) Vérifier que h est la bijection réciproque de la fonction f.
   (b) En déduire l'expression de la dérivée de h sur $\mathbb{R}$.
   (c) Vérifier le résultat obtenu à la question précédente en calculant directement la dérivée de h.

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\ln(1-2x) = \ln(x+2) + \ln 3$
2. $\ln\left(1-x^2\right) = \ln(2x-1)$
3. $\ln\sqrt{2x-2} = \ln(4-x) - \frac{1}{2}\ln x$
4. $2e^{2x} - 5e^x = -2$
5. $e^x - 2e^{-x} - 1 = 0$
6. $\ln(2-x) \leqslant \ln(2x+1) - \ln(3)$
7. $\ln(3x+2) \geqslant \ln\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)$
8. $e^x > -3$
9. $\exp\left(1 + \frac{2}{x}\right) \leqslant e^x$

Exercice 7

Étudier les limites aux bornes de son ensemble de définition de la fonction f définie par :

a) $f(x) = 3x + 2 - \ln x$; b) $f(x) = \dfrac{2x + \ln x}{x}$; c) $f(x) = \dfrac{2\ln x - 1}{x}$;

d) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \ln x$; e) $f(x) = \dfrac{e^x - 2}{e^x + 1}$; f) $f(x) = \exp\left(\dfrac{x+3}{x^2-1}\right)$;

g) $f(x) = xe^x - e^x + 1$

Exercice 8

1. Dans chacun des cas suivants, calculer la dérivée f' de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$:

   a) $f(x) = x\ln x - x$; b) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$; c) $f(x) = \ln\sqrt{x}$;

   d) $f(x) = (\ln x)^2$; e) $\ln(x^2)$

2. Calculer la dérivée f' de la fonction f sur son ensemble de définition :

   a) $f(x) = \exp(x^2 + 3x - 1)$; b) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$; c) $f(x) = e^{e^x}$;

   d) $f(x) = e^{\sqrt{x}\ln x}$