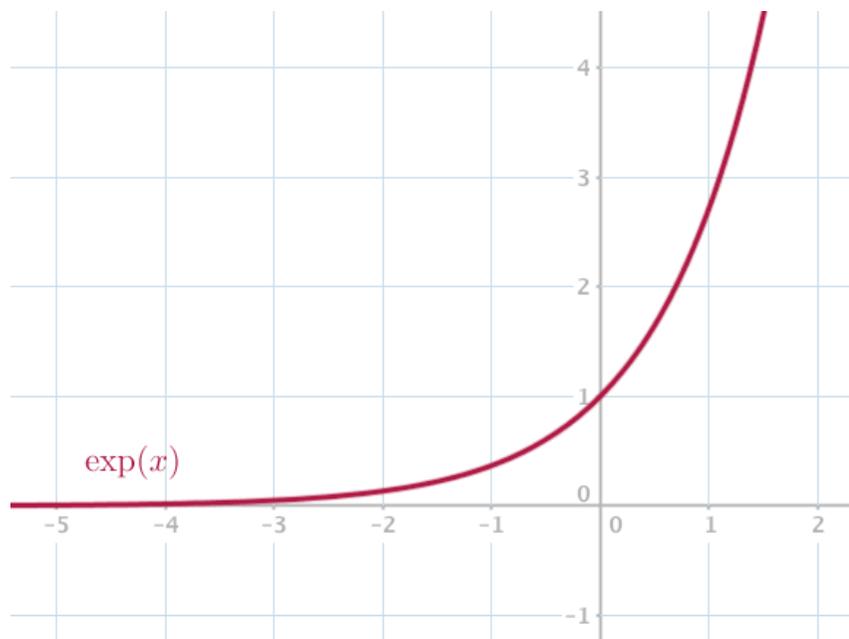


# Fonctions exponentielle et logarithme – Fiche cours

## 1. Fonction exponentielle

### a. Définition

La fonction exponentielle est définie, dérivable et unique sur  $\mathbb{R}$  tel que :  $f=f'$  et  $f(0)=1$  ; on utilise la notation  $\exp(x)=e^x$



### b. Propriétés de construction

$$e^x > 0 \quad e^0 = 1 \quad e^1 = e \approx 2,718$$

$e^x$  est croissante sur  $\mathbb{R}$

### c. Résolution d'équations et d'inéquations

$$e^x = e^a \Leftrightarrow x = a \quad e^x < e^a \Leftrightarrow x < a \quad e^x > e^a \Leftrightarrow x > a$$

### d. Dérivée et composition

$$- \forall x \in \mathbb{R} \quad (e^x)' = e^x$$

$$- \forall x \in \mathbb{R} \quad (e^u)' = u' \cdot e^u$$

### e. Propriétés algébriques

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$e^{x+y} = e^x \times e^y \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad (e^x)^n = e^{n \cdot x}$$

### f. Croissances comparées

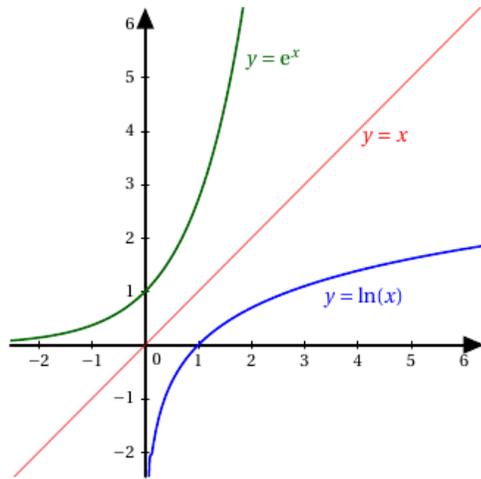
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \cdot e^x = 0 \quad - \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

## 2. Fonction logarithme

### a. Définition

La réciproque de  $e^x$  s'appelle fonction logarithme népérien et est définie par :

$$\begin{cases} x \rightarrow \ln x \\ ]0; +\infty[ \rightarrow ]-\infty; +\infty[ \end{cases}$$



### b. Propriétés

$$x \in ]0; 1[ \quad \ln x < 0 \quad x = 1 \quad \ln x = 0 \quad x \in ]1; +\infty[ \quad \ln x > 0$$

### c. Règles de calcul

$$\forall a > 0 \quad \forall b > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\ln a + \ln b = \ln(a \cdot b) \quad \ln a - \ln b = \ln\left(\frac{a}{b}\right) \quad n \cdot \ln a = \ln a^n$$

### d. Liens avec la fonction exponentielle

$$\forall a \in \mathbb{R} ; \ln e^a = a$$

$$\forall b \in ]0; +\infty[ ; e^{\ln b} = b$$

### e. Equations et inéquations logarithmiques

$$\forall a > 0 \quad \forall b > 0$$

$$\ln a > \ln b \Leftrightarrow a > b$$

$$\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$$

$$\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$$

### f. Limites

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = +\infty \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

### g. Composition de fonction

- Dérivée  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$   $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

- Fonction associée

Soit  $u$  une fonction à valeur positives définie sur  $I$   
 $u$  et  $\ln u$  ont les mêmes variations sur  $I$