Fonctions trigonométriques réciproques – Exercices – Devoirs

Exercice 1

1. Calculer les valeurs de arccos et arcsin en 0, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Idem pour arctan en 0, 1, $\sqrt{3}$ et $\frac{1}{\sqrt{3}}$.
2. Calculer le domaine de définition et de dérivabilité de $f(x) = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$, puis calculer sa dérivée. En déduire que $f(x) = \arcsin x$, pour tout $x \in]-1, 1[$.
3. Montrer que $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$, pour tout $x \in [-1, 1]$.

Exercice 2

1. Calculer $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\arccos\left(\frac{-1}{2}\right)$.
2. Calculer $\arccos\left(\cos\frac{7\pi}{3}\right)$, $\arccos\left(\sin(\frac{3\pi}{2})\right)$ et $\arcsin\left(\cos(\frac{\pi}{17})\right)$.
3. En utilisant les formules de trigonométrie habituelles, simplifier les expressions suivantes :

$$\sin(2\arcsin(x)),\ \cos(2\arccos(x)) \text{ et } \sin^2\left(\frac{\arccos(x)}{2}\right).$$

Exercice 3

Donner le domaine de définition et calculer les fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \sin(\arcsin(x))$,
2. $x \mapsto \arcsin(\sin(x))$,
3. $x \mapsto \cos(\arccos(x))$,
4. $x \mapsto \arccos(\cos(x))$,
5. $x \mapsto \tan(\arctan(x))$,
6. $x \mapsto \arctan(\tan(x))$.

Exercice 4

1. Calculer $\arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$, $\arcsin\left(\sin(\frac{5\pi}{6})\right)$, $\arccos\left(\cos(\frac{5\pi}{6})\right)$, $\sin(\arcsin(1))$, $\arcsin(\sin(1))$ et $\arctan(\tan(3))$.
2. Calculer $\arcsin\left(\sin(\frac{11\pi}{7})\right)$ et $\arctan\left(\tan(-\frac{17\pi}{5})\right)$.
3. Calculer $\cos(\arcsin x)$, $\tan(\arcsin x)$, $\cos(\arctan x)$.
4. En utilisant les formules de trigonométrie habituelles, simplifier les expressions suivantes : $\sin(\arccos(x))$, $\cos(2\arcsin(x))$, et $\sin(\arctan(x))$.

Exercice 5

Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \text{sign}(x)\frac{\pi}{2}$.

Exercice 6

On considère la fonction définie par $f(x) = \arcsin\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$.

1. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée (simplifier au maximum l'expression de f').
2. En déduire une autre expression de f.

Exercice 7

Calculer les nombres suivants

$a)$ $\arcsin\left(\sin\frac{18\pi}{5}\right)$ $\quad b)$ $\arccos\left(\sin\frac{18\pi}{5}\right)$

$c)$ $\arcsin\left(\sin\frac{15\pi}{7}\right)$ $\quad d)$ $\arcsin\left(\sin\frac{10\pi}{3}\right)$

$e)$ $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$ $\quad f)$ $\tan\left(\arctan\frac{\pi}{2}\right)$

Exercice 8

Résoudre les équations suivantes :

$a)$ $\arctan(2x) + \arctan x = \frac{\pi}{4}$

$b)$ $\arcsin x + \arcsin(x\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}$

$c)$ $(\arcsin x - 5)\arcsin x = -4$

Exercice 9

Etudier et représenter graphiquement les fonctions f et g définies par

$$f(x) = \arcsin(\sin x) \quad \text{et} \quad g(x) = \arctan(\tan x)\,.$$

Exercice 10

Soit $f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{1+x}{\sqrt{2(1+x^2)}}\right)$.

1. Déterminez l'ensemble de définition de f.
2. Montrez que f est dérivable sur $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$ et déterminez f'.
3. Simplifiez l'expression de f sur $]-\infty, 1[$ et $]-\infty, 1[$.

Exercice 11

Montrer que l'on a la relation suivante, si et seulement si $ab < 1$:

$$\arctan a + \arctan b = \arctan \frac{a+b}{1-ab}\,.$$

Application : calculer

$$S = 2\arctan\frac{1}{4} + \arctan\frac{1}{7} + 2\arctan\frac{1}{13}\,.$$

Exercice 12

a. Calculez $\operatorname{Arctan}(2) + \operatorname{Arctan}(5) + \operatorname{Arctan}(8)$.

b. Résoudre dans **R** l'équation

$$\operatorname{Arctan}(x-3) + \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(x+3) = \frac{5\pi}{4}$$

Exercice 13

Etudier et représenter graphiquement la fonction f définie par

$$f(x) = \arctan\frac{2(1-x)}{2x-x^2}\,,$$

et exprimer $f(x)$ en fonction de $\arctan(x-1)$.

Exercice 14

Etudier et représenter graphiquement la fonction f définie par

$$f(x) = \arcsin(3x - 4x^3)\,,$$

et exprimer $f(x)$ en fonction de $\arcsin x$.

Exercice 15

Démontrer :

a) $\forall x \in [-1\,;1]$, $\cos[\arcsin(x)] = \sqrt{1-x^2}$ et $\sin[\arccos(x)] = \sqrt{1-x^2}$

b) $\forall x \in]-1\,;1[$, $\tan[\arcsin(x)] = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

c) $\forall x \in [-1\,;1]-\{0\}$, $\tan(\arccos(x)) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

d) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin[\arctan(x)] = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\cos[\arctan(x)] = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Exercice 16

Calculer les dérivées des fonctions f_i définies par :

a) $y = f_1(x) = \arcsin(2x-3)$

b) $y = f_2(x) = \arccos(x^2)$

c) $y = f_3(x) = \arctan(3x^2)$

d) $y = f_4(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Exercice 17

Déterminer, lorsque c'est possible, les solutions des équations suivantes :

a. $\arcsin x = \frac{2\pi}{3}$

b. $\arctan x = \frac{2\pi}{3}$

c. $\arcsin x + \arctan(\frac{1}{3}) = \frac{\pi}{4}$

d. $\arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}$

e. $\arcsin(2x) - \arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin(x)$

f. $\arccos x + \arctan \frac{1}{2} = \pi$

g. $\arccos x + \arctan \frac{1}{2} = \frac{3\pi}{3}$

Exercice 18

Évaluer :

a. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$

b. $\arctan\left(\tan\left(\frac{9\pi}{4}\right)\right)$

c. $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{-9\pi}{4}\right)\right)$

d. $\tan(\arctan(3))$

e. $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

f. $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

g. $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$

h. $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$

i. $\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)$

j. $\sin\left(\arccos\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan 2\right)$

Exercice 19

Calculer le domaine de définition des fonctions f_i définies par :

a) $y = f_1(x) = \arcsin\left(\frac{x-1}{2x+3}\right)$

b) $y = f_2(x) = \dfrac{x}{\arctan\sqrt{x^2-1}}$

c) $y = f_3(x) = \arccos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

Exercice 20

Soient les fonctions

$$u : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow &]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \\ x & \mapsto & \arctan\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right) \end{cases} \quad \text{et} \quad v : \begin{cases}]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ y & \mapsto & \sqrt{\dfrac{1-\tan(y)}{1+\tan(y)}} \end{cases}.$$

Vérifier que v est une fonction bien définie. En calculant $u \circ v$ et $v \circ u$ sur ces intervalles, vérifier que $v = u^{-1}$.

Exercice 21

Calculer les nombres suivants :

$$\arctan(\sqrt{3}), \ \arcsin\left(\sin\frac{18\pi}{5}\right), \ \arccos\left(\cos\frac{4\pi}{3}\right)$$

Exercice 22

Soit $f(x) = \arctan(x) + 2\arctan(\sqrt{1+x^2} - x)$.

a) Déterminer son ensemble de dérivabilité et calculer sa dérivée.

b) En déduire que :

$$\arctan(x) + 2\arctan(\sqrt{1+x^2} - x) = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 23

Justifier soigneusement chaque réponse.

1. Déterminer la valeur de $arccos\left(cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.
2. Déterminer la valeur de $arcsin\left(sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.
3. Déterminer la valeur de $arccos\left(cos\left(\frac{13\pi}{4}\right)\right)$.

Exercice 24

1. Rappel : $arctan$ est la fonction réciproque de la fonction $tan : \left]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R}$
   (a) Déterminer les valeurs de $arctan(1)$ et de $arctan(-1)$ en justifiant vos réponses.
   (b) Prouver que la fonction $arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'expression de sa dérivée.
2. Pour tout x réel non nul, on définie la fonction f par $f(x) = arctan(x) + arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.
   (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}^*$, déterminer l'expression de $f'(x)$.
   (c) La fonction f est-elle constante sur $\mathbb{R}^*$? Et sur $]0; +\infty[$? Justifier vos réponses.
3. Déduire des questions précédentes la valeur de $f(136)$.