# Généralités des fonctions – Exercices - Devoirs

## Exercice 1

Déterminer le domaine de définition des fonctions composées suivantes :

1. $f_1(x) = \dfrac{1}{x^2-3x+2}$
2. $f_2(x) = \ln(-5x+1)$
3. $f_3(x) = \ln\left(x^2+5x-3\right)$

## Exercice 2

Écrire les fonctions suivantes sous la forme $f \circ g$ et en déduire leur dérivée.
(Pour les questions 5 et 6, on suppose que $f$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.)

1. $f_1(x) = \cos(5x+1)$,
2. $f_2(x) = e^{\cos(x)}$,
3. $f_3(x) = \ln(e^x+1)$,
4. $f_4(x) = (2x+1)^5$,
5. $f_5(x) = f(-x)$,
6. $f_6(x) = f\left(x^2\right)$.

## Exercice 3

Soit

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^2+x-2. \end{array}$$

1. Déterminer les ensembles $f([-1,0])$ et $f(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $f^{-1}([-3,0])$ et $f^{-1}(\mathbb{R}^+)$.
3. Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ lorsque $f(x)$ réalise une bijection de $[0;+\infty[$ vers $[-2;+\infty[$

## Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R}\setminus\{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction $f$.
2. Est-ce que la fonction $f$ est surjective ?
3. Est-ce que la fonction $f$ est injective ?
4. Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ lorsque $f(x)$ réalise une bijection de $]1;+\infty[$ vers $]2;+\infty[$

## Exercice 5

1. Les fonctions suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?
   - $f_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $x \mapsto x^2$.
   - $f_2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $x \mapsto x-7$.
   - $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow [0,+\infty[$, $x \mapsto |x|$.
   - $f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$.
   - $f_5 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3 - x$.
2. Montrez que la fonction $g : ]1,+\infty[ \rightarrow ]0,+\infty[$ définie par $g(x) = \frac{1}{x-1}$ est bijective. Calculez $g^{-1}$.
   Calculer $(g^{-1})'$ de 2 façons différentes
3. Déterminez $E$ et $F$ pour que $h(x) = x^2+2$ soit une bijection de $E$ sur $F$. Déterminez $h^{-1}$.
   Calculer $\left(h^{-1}\right)'$ de 2 façons différentes

## Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

1. Est-ce que $f$ est injective ?
2. Est-ce que $f$ est surjective ?
3. Déterminer $f^{-1}(\mathbb{R})$ et $f(\mathbb{R})$.

## Exercice 7

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 3$.

1. $f$ est-elle injective ?
2. $f$ est-elle surjective ?
3. Déterminer $f([-1,1])$, $f([-2,1])$, $f([-5,-1])$.
4. Déterminer $f^{-1}([-1,1])$, $f^{-1}([-2,1])$, $f^{-1}([-5,-1])$.
5. Comparer $f^{-1}(f([-2,4]))$ et [-2, 4].
6. déterminer $A$ et $B$ de sorte que $g_1 : A \to B, x \mapsto x^2 - 3$ soit surjective et non injective.
7. déterminer $A$ et $B$ de sorte que $g_2 : A \to B, x \mapsto x^2 - 3$ soit non surjective et injective.
8. déterminer $A$ et $B$ de sorte que $g_1 : A \to B, x \mapsto x^2 - 3$ soit bijective.

## Exercice 8

On considère l'application $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, (a,b) \mapsto ab$.

1. $f$ est-elle injective ?
2. $f$ est-elle surjective ?
3. Calculer $f((3,4))$, $f((1,8))$, $f((4,3))$.
4. Quels sont les antécédents de 3 ? Quels sont les antécédents de 60 ?
5. Déterminer $f(\{0,1,2\} \times \{1,3\})$, $f(\{0\} \times \mathbb{N})$.
6. Déterminer $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(\{2\})$, $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\{6\})$, $f^{-1}(\{0,1,2\})$. .

## Exercice 9

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x/(1+x^2)$.

1. $f$ est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$.
3. Montrer que la restriction $g : [-1,1] \to [-1,1]$ $g(x) = f(x)$ est une bijection.
4. Retrouver ce résultat en étudiant les variations de $f$.

## Exercice 10

*Soit l'application f définie comme suit :*

$$f : \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \longrightarrow \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$$
$$x \mapsto f(x) = \frac{x+1}{2x-1}$$

2. *f est-elle injective ?*
3. *f est-elle surjective ?*
4. *Donner l'expression de $(f \circ f)(x)$.*
5. *Par <u>deux méthodes différentes</u>, retrouver l'expression de $f^{-1}(x)$.*

## Exercice 11

Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité des applications suivantes. Lorsqu'elles sont bijectives, déterminer les applications réciproques

1. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$

2. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$

3. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x+1 \end{array} \right.$

4. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array} \right.$

5. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array} \right.$

6. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array} \right.$

7. $f : \left| \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & |x| \end{array} \right.$

8. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array} \right.$

9. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^4 \end{array} \right.$

10. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^4 \end{array} \right.$

11. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^5 \end{array} \right.$

12. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{array} \right., n \in \mathbb{N}^\star$

13. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & ]1,+\infty[ \\ x & \mapsto & e^{-x}+1 \end{array} \right.$

14. $f : \left| \begin{array}{ccc} ]-1,+\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(1+x) \end{array} \right.$

15. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & ]-4,+\infty[ \\ x & \mapsto & 2^x-4 \end{array} \right.$

16. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [-\sqrt{2},\sqrt{2}] \\ x & \mapsto & \cos(x)+\sin(x) \end{array} \right.$

17. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & 2n+1 \end{array} \right.$

## Exercice 12

Soit $f$ une application définie par $f(x) = \dfrac{x-1}{1-2x}$.

Montrer que $f$ est bijective de $\mathcal{D}_f$ sur un sous ensemble de $\mathbb{R}$ à déterminer

Quelle est l'expression de $f^{-1}$

## Exercice 13

Soient E, F et G trois ensembles. Soient f : E → F et g : F → G deux applications.

1. Montrer que la composée de deux injections est une injection et que la composée de deux surjections est une surjection
2. Montrer que si g ◦ f est injective et f surjective alors g est injective.
3. Montrer que si g ◦ f est surjective et g injective alors f est surjective.
4. Montrer que si $f$ et $g$ sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective et que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

## Exercice 14

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction carrée. Déterminer $f([-1,2])$.
2. Déterminer $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]\right)$, $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[\right)$ et $\cos\left(\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{6}\right[\right)$.

## Exercice 15

Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longmapsto \mathbb{R} \setminus \{2\}$ l'application définie par :

$$f(x) = \frac{2x+5}{x-1}.$$

Montrer que $f$ est bijective et déterminer sa réciproque $f^{-1}$.

## Exercice 15

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$.

a) Préciser son ensemble de définition $D_f$, dresser son tableau de variation et tracer son graphe.

b) Déterminer $f\left(D_f\right)$. Montrer que $f$ est une bijection de $D_f$ sur $f\left(D_f\right)$.

c) Déterminer sa fonction réciproque $f^{-1}$ et tracer ensemble les graphes de $f$ et $f^{-1}$.

## Exercice 16

Soit $f : ]\,0,\ 1\,[ \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x}$.

a) Montrer que $f$ est une bijection de $]\,0,\ 1\,[$ sur un intervalle que l'on précisera.

b) En déduire que l'équation $f(x) = \dfrac{2}{\pi}$ admet dans l'intervalle $]\,0,\ 1\,[$ une solution unique $\alpha$.

   i) Comparer $\alpha$ et $\frac{1}{2}$.

   ii) Comparer $\alpha$ et $\frac{1}{4}$.

c) Déterminer la bijection réciproque $f^{-1}$.