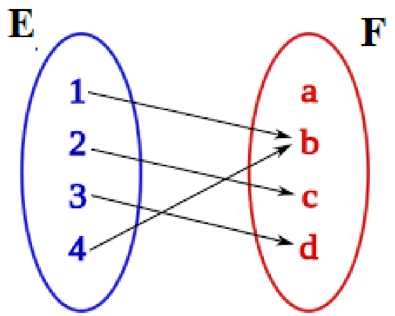
Généralités des fonctions – Fiche de cours

1. Ensembles associés à une fonction

a. Définition

Soient E et F deux ensembles avec $\begin{cases} x \to y = f(x) \\ E \to F \end{cases}$

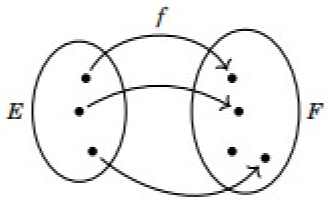
On appelle : - E ensemble de définition
- F ensemble d'arrivée ou des images

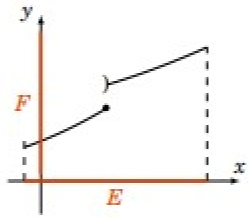


b. Fonction injective

- Définition

Une fonction f est injective si à tout élément $y = f(x) \in F$, il existe au plus un antécédent $x \in E$





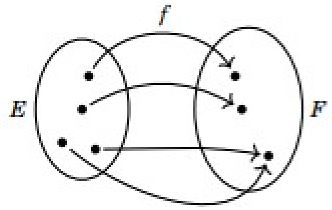
- Propriétés

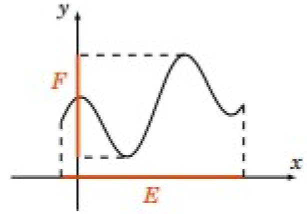
- une fonction monotone sur un intervalle est injective
- $\forall (x, x') \in E^2 \quad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

c. Fonction surjective

- Définition

Une fonction f est surjective si à tout élément $y = f(x) \in F$, il existe au moins un antécédent $x \in E$





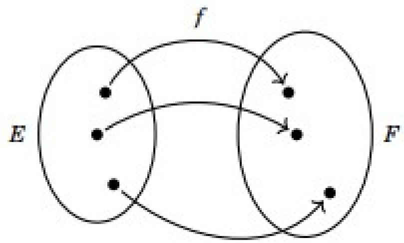
- Propriétés

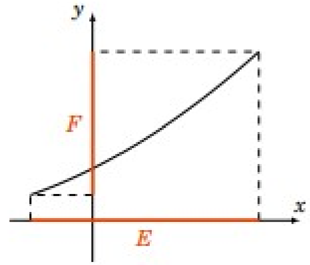
- une fonction monotone sur un intervalle est bijective
- $\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad y = f(x)$

d. Fonction bijective

- Définition

Une fonction f est bijective si à tout élément $y = f(x) \in F$, il existe 1 seul antécédent $x \in E$





- Propriétés

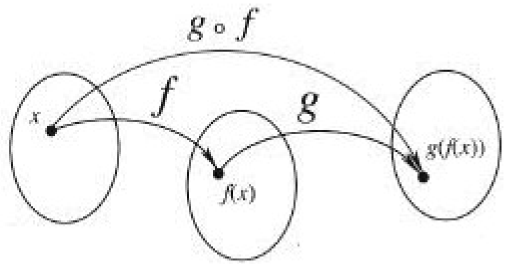
- une fonction monotone sur un intervalle est bijective
- une fonction injective et surjective sur un intervalle est bijective
- $\forall y \in F \quad \exists! x \in E \quad y = f(x)$

2. Composition de fonctions

a. Définition

Soit f une fonction définie sur E à valeurs dans F et g une fonction définie sur F

La composée de f par g est définie par :



$$(g\circ f)(x)=g(f)(x)$$

b. Sens de variation des fonctions composées

- si $f(x)$ et $g(x)$ ont même sens de variation alors $g\circ f$ est croissante
- si $f(x)$ et $g(x)$ ont des variations contraires alors $g\circ f$ est décroissante

c. Dérivée

Soit f une fonction définie sur E à valeurs dans F et g une fonction définie sur F alors :

$$(g\circ f)'(x)=g'(f)(x)\cdot f'$$

Soit u une fonction définie et dérivable sur I :

- $(e^u)'=u'\cdot e^u$
- $\left(\frac{1}{u}\right)'=\frac{-u'}{u^2}$ avec $u\neq 0$
- $(u^n)'=n\cdot u'\cdot u^{n-1}$
- $(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u>0$

d. Propriétés

- la composée de 2 fonctions continues sur E est continue
- la somme et le produit de fonctions continues sur E est continue
- si g ne s'annule pas sur E alors $\frac{f}{g}$ est continue sur E

3. Théorème de la bijection

a. Bijection réciproque

- La fonction $f(x)$ est bijective si et seulement si il existe une fonction $y=g(x)$ telle que $g\circ f(x)=x$ et $f\circ g(y)=y$
- Si $f(x)$ est bijective alors $g(x)$ est bijective
- $g(x)$ s'appelle la bijection réciproque et est notée $f^{-1}(x)$

b. Propriétés de la réciproque

- $f(x)\circ f^{-1}(x)=x$
- $f(x)$ et $f^{-1}(x)$ ont mêmes variations sur leur domaine de définition
- $(f^{-1}(x))^{-1}=f$
- $(f(x)\circ f^{-1}(x))'=1=(f^{-1})'\cdot f'(f^{-1}(x))$