Logique et raisonnement – Exercices – Devoirs

Exercice 1 **corrigé disponible**

Soient les quatre assertions suivantes :

(a) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x+y>0$; (b) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad x+y>0$;

(c) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x+y>0$; (d) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2>x$.

Les assertions a, b, c, d sont-elles vraies ou fausses ?

Exercice 2 **corrigé disponible**

Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose : $\Leftrightarrow$, $\Leftarrow$, $\Rightarrow$.

1. $x \in \mathbb{R}\ \ x^2=4\ \ldots\ldots\ x=2$;
2. $z \in \mathbb{C}\ \ z=\overline{z}\ \ldots\ldots\ z \in \mathbb{R}$;
3. $x \in \mathbb{R}\ \ x=\pi\ \ldots\ldots\ e^{2ix}=1$.

Exercice 3 **corrigé disponible**

Dans $\mathbb{R}^2$, on définit les ensembles $F_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y \leqslant 0\}$ et $F_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ xy \geqslant 1,\ x \geqslant 0\}$. Evaluer les propositions suivantes :

1. $\forall \varepsilon \in]0,+\infty[\quad \exists M_1 \in F_1\, \exists M_2 \in F_2 \quad / \quad ||\overrightarrow{M_1M_2}||<\varepsilon$
2. $\exists M_1 \in F_1\, \exists M_2 \in F_2 \quad / \quad \forall \varepsilon \in]0,+\infty[\quad ||\overrightarrow{M_1M_2}||<\varepsilon$
3. $\exists \varepsilon \in]0,+\infty[\quad / \quad \forall M_1 \in F_1\, \forall M_2 \in F_2 \quad ||\overrightarrow{M_1M_2}||<\varepsilon$
4. $\forall M_1 \in F_1\, \forall M_2 \in F_2 \quad \exists \varepsilon \in]0,+\infty[\quad / \quad ||\overrightarrow{M_1M_2}||<\varepsilon$

Exercice 4 **corrigé disponible**

Soit f,g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

1. f est majorée ;
2. f est bornée ;
3. f est paire ;
4. f est impaire ;
5. f ne s'annule jamais ;
6. f est périodique ;
7. f est croissante ;
8. f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$;

Exercice 5 **corrigé disponible**

En utilisant le principe du raisonnement par l'absurde démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers

Exercice 6 **corrigé disponible**

Montrer :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 7

Soit P, Q, R des propositions. Dans chacun des cas suivants, les propositions citées sont- elles la négation l'une de l'autre ?

1. (P et Q) vs (non P et non Q) ;
2. $(P \Rightarrow Q)$ vs (non Q) $\Rightarrow$ (non P) ;
3. (P ou Q) vs (P et Q).

Exercice 8

Soit a, b, c des réels.
Écrire la négation des propositions suivantes :

1. $a \leq -2$ ou $a \leq 3$;
2. $a \leq 5$ et $a > -1$;
3. $a \leq 5$ ou $3 > c$;

Exercice 9

Démontrer les énoncés suivants par récurrence (éventuellement forte) :

1. Pour tout naturel n, on a $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$
2. Pour tout entier naturel n, on a $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
3. Pour tout entier naturel n, $10^n - (-1)^n$ est divisible par 11.

Exercice 10

Ecrire les contraposées des implications suivantes et les démontrer. n est un entier naturel, x et y sont des nombres réels.

1. n premier $\Rightarrow n = 2$ ou n est impair ,
2. $xy \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ et $y \neq 0$,
3. $x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$.

Exercice 11

Ecrire les réponses aux questions suivantes, portant sur des entiers naturels, sous la forme d'assertions mathématiques (écrites avec les symboles "$\forall$", "et", "ou", "$\Rightarrow$", "$\Leftrightarrow$") et les prouver.

1. Le produit de deux nombres pairs est-il pair ?
2. Le produit de deux nombres impairs est-il impair ?
3. Le produit d'un nombre pair et d'un nombre impair est-il pair ou impair ?
4. Un nombre entier est-il pair si et seulement si son carré est pair ?

Exercice 12

Démontrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel en utilisant un raisonnement par l'absurde

Exercice 13

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que soit 4 divise n^2, soit 4 divise $n^2 - 1$.

Exercice 14

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1. $n^3 - n$ est divisible par 6 ,
2. $n^5 - n$ est divisible par 30 ,
3. $n^7 - n$ est divisible par 42 .

Exercice 15

Préciser la validité des énoncés suivants puis les nier.

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{N},\ m$ divise n.
2. $\exists m \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ m$ divise n.
3. $\exists a \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ |a| \leqslant \varepsilon$.
4. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in \mathbb{R},\ |a| \leqslant \varepsilon$.
5. $\forall M > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ 2^n > M$.
6. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y < x$.
7. $\forall x \in \mathbb{R},\ (x + 1 \neq 0 \text{ OU } x + 2 \neq 0)$.

Exercice 16

Soient a et b deux réels strictement positifs.

1. Démontrer que $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
2. En déduire que $\left|\sqrt{a} - \sqrt{b}\right| \leqslant \sqrt{|a-b|}$.

Exercice 17

Démontrer que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$.

Exercice 18

Démontrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$xy \leqslant \frac{x^2 + y^2}{2}$$

Exercice 19

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$.

Exercice 20

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Exercice 21

Ecrire les propositions suivantes et leurs négations à l'aide de quantificateurs et dire lesquelles sont vraies.

1. Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.
2. Il existe un entier multiple de tous les autres.
3. Tout complexe possède au moins une racine carré dans $\mathbb{C}$.
4. Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers.
5. Certains réels sont supérieurs à leur carré.
6. Etant donné trois réels, il y en a au moins deux de même signe.