

Nombres complexes – Exercices – Devoirs

Exercice 1

$$(1 - i)X^3 - (5 + i)X^2 + (4 + 6i)X - 4i = 0$$

1. Montrer que cette équation admet une racine réelle.
2. Résoudre cette équation.

Exercice 2

1. Montrer que
$$X^3 + (1 - 2i)X^2 - 3(1 + i)X - 2 + 2i = 0 \quad (E)$$
Admet une ou plusieurs racines réelles.
2. Résoudre (E)

Exercice 3

1. Calculer les racines n -ième de $-i$ et de $1 + i$.
2. Résoudre $z^2 - z + 1 - i = 0$.
3. En déduire les racines de $z^{2n} - z^n + 1 - i = 0$.

Exercice 4

Pour tout nombre complexe z différent de 1, on définit $Z = \frac{z-2i}{z-1}$.

On pose $z = x + iy$ et $Z = X + iY$ avec x, y, X et Y réels

1. Exprimer X et Y en fonction de x et y .
2. Déterminer l'ensemble Γ des points M d'affixe z tels que Z soit réel.
3. Déterminer l'ensemble C des points M d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur.

Exercice 5

Pour tout nombre complexe z différent de i , on définit $Z = \frac{z+3}{z-i}$.

On pose $z = x + iy$ et $Z = X + iY$ avec x, y, X et Y réels

1. Exprimer X et Y en fonction de x et y .
2. Déterminer l'ensemble Γ des points M d'affixe z tels que Z soit réel.
3. Déterminer l'ensemble C des points M d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur.

Exercice 6

Représenter les ensembles suivants sur le graphique ci-dessous (on ne demande pas de justification)

$$\begin{array}{l} \mathcal{E}_1 = \left\{ M(z) / \arg(z - 2i + 1) = \frac{2\pi}{3} \quad (2\pi) \right\} \\ \mathcal{E}_2 = \left\{ M(z) / \arg\left(\frac{z - 2i + 1}{z - 3 + i}\right) = \pi \quad (2\pi) \right\} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \mathcal{E}_3 = \left\{ M(z) / Z = i \frac{z - 2i + 1}{z - 3 + i} \in \mathbb{R}_+ \right\} \\ \mathcal{E}_4 = \{ M(z) / |z + 2 + i| = |z - 2i| \} \end{array} \right.$$

Exercice 7

- (1) Donner sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique les racines carrées de i .
- (2) Donner sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique les racines carrées de $-i$.
- (3) Donner sous forme trigonométrique les racines quatrièmes de i .
- (4) Calculer sous forme algébrique les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.
- (5) En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$, puis les racines quatrièmes de i sous forme algébrique.

Exercice 8

Linéariser les expressions suivantes :

1. $A = \sin^3 x$,
2. $B = \cos(2x)\sin(x)$,
3. $C = \sin^4 x \cos x$,
4. $D = \sin(4x)\cos(x)$.

Exercice 9

Calculer les sommes suivantes :

$$(1) S = \sum_{k=0}^{32} \left(\frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^k$$

$$(2) S_n = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$$

$$(3) T_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta)$$

Exercice 10

On considère le nombre complexe $\omega = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$.

1. Calculer les racines carrées de ω en les cherchant sous la forme algébrique.
2. Donner la forme exponentielle de ω .
3. Calculer les racines carrées de ω en les cherchant sous la forme exponentielle.
4. En déduire les valeurs de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

On considère le nombre complexe $\Delta = -5 + 12i$.

5. Vérifier que le nombre complexe $2 + 3i$ est une racine carrée de Δ .
6. Résoudre l'équation

$$z^2 - (4 + 5i)z - 1 + 7i = 0.$$

Exercice 11

1. Déterminer l'ensemble des points z de $\mathbb{C}$ avec $z \neq 1 + i$ tels que $\frac{z}{z-1-i}$ soit réel.
2. Dessiner le lieu géométrique obtenu.

Exercice 12

Soient $z = a+ib$ et z' deux nombres complexes. Rappeler la définition de $|z|$ et démontrer à partir de celle-ci les propriétés suivantes :

1. $|z|^2 = z\bar{z}$,
2. $|zz'| = |z| \times |z'|$,
3. si $z \neq 0$ alors $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$.

Exercice 13

1. Calculer les racines du nombre complexe $z_1 = 3-4i$, sous forme algébrique.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 + (2+i)z + 2i = 0.$$

Une partie des points est attribuée à la vérification des solutions de l'équation.

3. On considère le nombre complexe $z_2 = \sqrt{3} + i$.
 - (a) Donner la forme exponentielle de z_2 .
 - (b) Calculer les racines carrées de z_2 (de préférence sous forme exponentielle).
4. Quelles sont les racines cubiques du nombre complexe $z_3 = 4\sqrt{2}(1-i)$? On donnera les racines cubiques sous leur forme exponentielle principale $re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in [0; 2\pi[$.

Exercice 14

1. Déterminer les racines carrées de $e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$
 - (a) sous forme algébrique, et
 - (b) sous forme exponentielle.
2. En déduire $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$.
3. Résoudre l'équation du second degré suivante

$$z^2 + (1+i)z - \frac{1}{4} \left(\sqrt{2} + i \left(\sqrt{2} - 2 \right) \right) = 0.$$

Exercice 15

1. Exprimer $\cos(4x)$ à l'aide de $\cos x$ et de ses puissances.
2. Exprimer $\frac{\sin(5x)}{\sin(x)}$ à l'aide de $\cos x$ et de ses puissances.
3. Exprimer ces mêmes expressions à l'aide de $\sin x$ et de ses puissances.

Exercice 16

On rappelle que pour tous a et b dans $\mathbb{R}$, on a

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b), \\ \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b). \end{cases}$$

1. Montrer que pour tous a et b dans $\mathbb{R}$, on a

$$e^{ia}e^{ib} = e^{i(a+b)}.$$

2. En déduire la formule de Moivre

$$(e^{ia})^n = e^{ina}.$$

Exercice 17

Calculer les quatre intégrales suivantes en utilisant une méthode adaptée :

$$I = \int_0^\pi \cos^{50}(x) \sin(x) dx,$$

$$J = \int_0^\pi \cos^4(2x) \sin^2(3x) dx,$$

$$K = \int_{-\frac{\pi}{5}}^{\frac{\pi}{5}} \cos^5(7x) \sin^7(-3x) dx,$$

$$L = \int_0^\pi x^3 \cos(x) dx.$$

Exercice 18

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A , B et C d'affixes respectives $a = 2$, $b = 1 - i$ et $c = 1 + i$.

1. Placer les points A , B et C sur une figure.
2. Calculer $\frac{c-a}{b-a}$. En déduire que le triangle ABC est rectangle et isocèle.
3. On considère l'application $r : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$r(z) = -iz + 2i + 2.$$

- (a) Expliquez pourquoi cette application est une rotation.
- (b) Calculer son angle et son centre (que vous donnerez sous forme algébrique).
- (c) Déterminer les images des affixes a et b par l'application r .

Exercice 19

On considère la fonction f définie par

$$f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^* \\ z \mapsto \frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{|z|^2}.$$

1. Justifier que $(f \circ f)(z) = z$. En déduire que f est une transformation du plan privé de $[0]$, $\mathbb{C}^*$ (c'est-à-dire une bijection).
2. Soit $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ le cercle trigonométrique. Montrer que pour tout $z \in \mathcal{U}$ on a $f(z) = z$. En déduire l'image de $\mathcal{U}$ par f .
3. **Bonus** : soit $\theta \in [0; 2\pi[$. On note

$$D_\theta = \{z \in \mathbb{C}^* : \text{Arg}(z) = \theta\}.$$

Quelle est la nature géométrique de D_θ ? Quelle est l'image de D_θ par f ?

Exercice 20

A chaque point M d'affixe z du plan complexe, on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z+2}{1+iz}$.

- 1) On note A le point d'affixe -2 et B celui d'affixe i .
Interpréter géométriquement le module de z' .
- 2) Déterminer géométriquement l'ensemble des points M tels que $|z'| = 1$.
Donner une équation cartésienne de cet ensemble.

Exercice 21

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2cm), on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = -1$ et $z_B = 3i$.

Soit la fonction f privé du point A dans P qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = i \left(\frac{z-3i}{z+1} \right)$$

1. Soit C le point d'affixe $z_C = 2-i$.

Montrer qu'il existe un seul point D tel que $f(D) = C$.

2. Déterminer la nature du triangle ABC .
3. A l'aide de l'égalité (1), montrer que, pour tout M distinct de A et de B :

$$\overrightarrow{OM'} = \frac{BM}{AM} \quad \text{et} \quad (\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2} + (\vec{MA}, \vec{MB}) \quad [2\pi]$$

4. En déduire et construire les ensembles de points suivants :
 - a. L'ensemble (E) des points M tels que l'image M' soit située sur un cercle (C) de centre O , de rayon 1.
 - b. L'ensemble (F) des points M tels que l'affixe de M' soit réelle.

Exercice 22

1. Démontrer la relation de Moivre en utilisant le principe du raisonnement par récurrence.
2. A l'aide du triangle de Pascal développer : $(a+b)^5$
3. Calculer $\cos(5a)$ en fonction de $\cos(a)$
4. En déduire $\cos \frac{\pi}{10}$
5. Calculer $\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{5\pi}{5}$
6. Linéariser $\sin^3 x$, $\cos^4 x$, $\sin^4 x \cdot \cos x$
7. Calculer $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$
8. Exprimer $\cos 4x$ avec $\cos x$ et ses puissances
9. Exprimer $\frac{\sin 4x}{\sin x}$ avec $\cos x$ et ses puissances

Exercice 23

1. Montrer qu'il n'y a qu'une seule racine cubique de 1 dont la partie imaginaire est strictement positive. On note j cette racine.
2. Montrer que :
 - a. $\bar{j} = j^2$
 - b. $1+j+j^2=0$
 - c. $|1+j|=1$

Exercice 24

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(t) = t - \sqrt{2}\sqrt{t} + \frac{1}{2}.$$

Le graphe de la fonction f dans $\mathbb{C}$ est donné par l'ensemble

$$\Gamma = \{t + if(t), \quad t \in \mathbb{R}_+\}.$$

1. Donner l'écriture complexe d'une rotation de centre Ω et d'angle θ .
2. On note $r : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ l'application définie par $r(z) = e^{i\frac{\pi}{4}}z$. Pour $t \in \mathbb{R}_+$, calculer $r(t + if(t))$. On donnera le résultat sous forme algébrique.
3. En posant $x = \sqrt{t} - \frac{\sqrt{2}}{4}$, montrer que

$$r(t + if(t)) = x + i\sqrt{2}\left(x^2 + \frac{1}{8}\right).$$

4. Justifier qu'en appliquant une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$ au graphe de la fonction f on obtient un morceau de parabole (dont on précisera l'équation).

Exercice 25

Soit $z_2 = 8 - 6i$. Déterminer les racines carrées de z_2 sous forme cartésienne.

Soit $P(X) = X^2 + (-5 - i)X + (4 + 4i)$.

Déterminer les racines de P .

Soit $Q(X) = X^3 + (-6 - i)X^2 + (9 + 5i)X + (-4 - 4i)$.

Ecrire $Q(X)$ comme produit de polynômes de degré 1.

Exercice 26

Soient les 2 signaux périodiques s_1 et s_2 , de même pulsation ω , tels que :

$$s_1(t) = \sqrt{2} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad s_2(t) = \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$$

- 1) Exprimer, sous forme exponentielle les grandeurs complexes $\underline{s}_1(t)$ et $\underline{s}_2(t)$, associées à $s_1(t)$ et $s_2(t)$, et en déduire les amplitudes complexes $\underline{A}_1$ et $\underline{A}_2$ de $\underline{s}_1(t)$ et $\underline{s}_2(t)$.
- 2) Montrer que pour obtenir l'amplitude complexe $\underline{A}$ associée à $\underline{s}(t) = \underline{s}_1(t) - \underline{s}_2(t)$, il suffit de soustraire les amplitudes complexes et qu'on a donc $\underline{A} = \underline{A}_1 - \underline{A}_2$. Représenter $\underline{A}_1$, $\underline{A}_2$ et $\underline{A}$ dans le plan complexe.
- 3) Calculer $\underline{A}$ en privilégiant la forme, algébrique ou exponentielle, la plus adaptée pour réaliser une addition.
- 4) Calculer l'amplitude $|\underline{A}|$ et l'argument $\arg(\underline{A})$ de $\underline{A}$.
- 5) En déduire la forme exponentielle de $\underline{s}(t)$, puis $s(t)$, la grandeur sinusoïdale (réelle) associée à $\underline{s}(t)$.

Exercice 27

1. Ecrire $f(t) = \cos \omega t - \sin \omega t$ sous la forme $f(t) = A \cos(\omega t + \phi)$
2. Ecrire $f(t) = \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{3} \sin\left(\omega t + \frac{3\pi}{4}\right)$ sous la forme $f(t) = A \cos(\omega t + \phi)$
3. Ecrire $f(t) = \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) + 3 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$ sous la forme $f(t) = A \cos(\omega t + \phi)$
4. Ecrire $f(t) = 4 \cos\left(\omega t + \frac{5\pi}{6}\right) + 4 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$ sous la forme $f(t) = A \cos(\omega t + \phi)$

Exercice 28

On considère les nombres complexes définis par $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 1 + i$, $z_3 = z_1/z_2$ et $z_4 = z_1 + z_2$.

- 1) Déterminer la forme algébrique de z_3 et de z_4 .
- 2) Mettre z_1 et z_2 sous forme exponentielle. En déduire les formes exponentielle et trigonométrique de z_3 .
- 3) En comparant les résultats des questions précédentes, en déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
- 4) Placer les points M_1 , M_2 , M_3 et M_4 d'affixe respectif z_1 , z_2 , z_3 et z_4 dans le plan complexe.
- 5) Sans faire le calcul explicite, comment peut-on déduire graphiquement $|z_1 + z_2|$ et $\arg(z_1 + z_2)$?