Nombres complexes – Fiche de cours

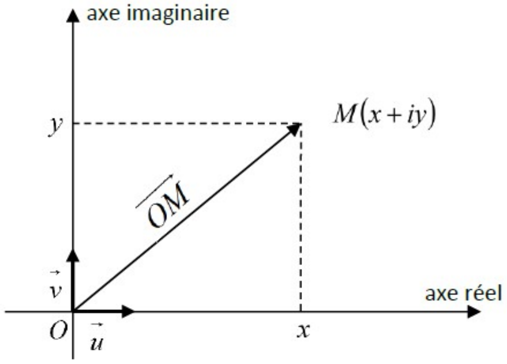
1. Représentation graphique des nombres complexes

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$

A tout nombre complexe $z=x+iy$ on associe le point $M(x;y)$

Propriétés :

- M s'appelle l'image de z
- z s'appelle l'affixe de M
- soit I le milieu du segment AB ; I pour affixe $z_I=\frac{(z_A+z_B)}{2}$



2. Equations du second degré

$\forall a\in\mathbb{R}^* \quad \forall b\in\mathbb{R} \quad \forall c\in\mathbb{R}$ on définit $(E)\ az^2+bz+c=0$

Considérons $\Delta=b^2-4ac$ avec δ une racine de Δ

- si $\Delta\neq0$ l'équation (E) admet 2 racines distinctes :

$$z_1=\frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2=\frac{-b-\delta}{2a}$$

- si $\Delta=0$ l'équation (E) admet une racine double :

$$z_0=\frac{-b}{2a}$$

3. Equations polynomiales

Soit le polynôme $P(z)=\sum_{k=0}^{k=n} a_k\cdot z^k$

- on appelle équation polynomiale de degré n $P(z)=0$
- un polynôme de degré n admet au plus n racines complexes
- $P(a)=0\Leftrightarrow P(z)=(z-a)\cdot Q(z) \qquad Deg(P)=n$ et $Deg(Q)=n-1$
- $z^n-a^n=(z-a)\sum_{k=0}^{n-1} a_k\cdot z^{n-k-1}$

4. Notation exponentielle

$\forall\theta\in\mathbb{R}$, on pose $e^{i\theta}=\cos\theta+i\cdot\sin\theta$

La forme exponentielle d'un nombre complexe est définie par : $z=|z|e^{i\theta}$

5. Formules d'Euler

$$\forall\theta\in\mathbb{R} \qquad \cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

6. Formule de Moivre

$$\forall\theta\in\mathbb{R} \quad \forall n\in\mathbb{N} \qquad \cos n\theta+i\sin n\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^n$$

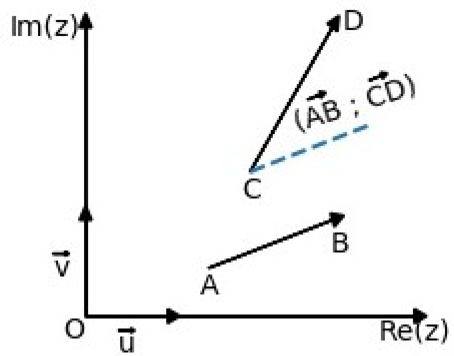
7. Formule de trigonométrie

$$\cos(a+b)=\cos a\cdot\cos b-\sin a\cdot\sin b$$
$$\cos(a-b)=\cos a\cdot\cos b+\sin a\cdot\sin b$$
$$\sin(a+b)=\sin a\cdot\cos b+\sin b\cdot\cos a$$
$$\sin(a-b)=\sin a\cdot\cos b-\sin b\cdot\cos a$$

8. Nombres complexes et géométrie

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$

Soient A, B, C et D des points du plan d'affixes z_A , z_B , z_C et z_D



a. Affixe d'un vecteur

A tout nombre complexe $z=x+iy$ on associe le vecteur $\vec{w}(x;y)$

Propriétés :

- $\vec{w}$ s'appelle le vecteur image de z
- z s'appelle l'affixe de $\vec{w}$

$$\overrightarrow{AB}=z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CD}=z_{\overrightarrow{CD}}=z_D-z_C$$

b. Norme d'un vecteur

$$\|\overrightarrow{AB}\|=AB=|z_B-z_A| \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{CD}\|=CD=|z_D-z_C|$$

c. Argument d'un vecteur

$$arg(\overrightarrow{AB})=arg(z_B-z_A)=(\vec{u};\overrightarrow{AB}) \quad [2\pi]$$

d. Argument de 2 vecteurs

$$arg(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD})=arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)=(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) \quad [2\pi]$$

9. Racines carrées d'un nombre complexe

On souhaite transformer $x+iy=(a+ib)^2$

On résout le système : $\begin{cases} x=a^2-b^2 \\ \sqrt{x^2+y^2}=a^2+b^2 \\ y=2a\cdot b \end{cases}$

10. Racines nième d'un nombre complexe

Les solutions de l'équation $z^n=x+iy$ sont les racines n[ième] d'un nombre complexe : si $z^n=|z|e^{i(\theta+2\pi k)}$ alors $z_k=|z|^{1/n}e^{i\frac{(\theta+2\pi k)}{n}}$

avec $0\leq k\leq n-1$ et $n=Deg(z^n)$

11. Inégalités triangulaires

$\forall (z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2$

$|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2| \qquad |z_1|-|z_2|\leq|z_1-z_2| \qquad |z_2|-|z_1|\leq|z_1-z_2|$

12. Transformations géométriques du plan

a. Translation

Soit M' d'affixe z' l'image de M d'affixe z par une translation de vecteur $\vec{u}$ alors $M'=t_{\vec{u}}(M)$ soit $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$ soit $z'=z+z_{\vec{u}}$

b. Homothétie

Soit M' d'affixe z' l'image de M d'affixe z par une homothétie de centre Ω et de rapport k

alors $M'=h_{\Omega,k}(M)$ soit $\overrightarrow{\Omega M'}=k\cdot\overrightarrow{\Omega M}$

soit $z'=z_\Omega+k\cdot(z-z_\Omega)$

c. Rotation

d. Similitude