Les polynômes – Fiche de cours

1. Définition

Soit $\mathbb{K}$ l'un des ensembles $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Un polynôme est une expression de la forme :

$$P(X) = a_n X^n + \dots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 \text{ avec } n \in \mathbb{N} \text{ et } a_k \in \mathbb{K}$$

- pour $a_n = 1$: polynôme unitaire
- $\deg(P) = n$

2. Division euclidienne

a. Définition

Soit A, B, Q et R des polynômes de $\mathbb{K}$

La relation $A = B \cdot Q + R$ avec $\deg(R) < \deg(B)$ est appelée division euclidienne polynomiale

b. pgcd

Soient A et B deux polynômes non nuls de $\mathbb{K}$

Le $\text{pgcd}(A; B)$ est l'unique polynôme unitaire de plus grand degré qui divise A et B

- $\text{pgcd}(\lambda A, B) = \text{pgcd}(A, B)$
- $\text{pgcd}(A, B) = \text{pgcd}(B, R)$ (division euclidienne)
- deux polynômes A et B sont premiers entre-eux si $\text{pgcd}(A, B) = 1$

3. Théorème de Bézout

Soient A et B deux polynômes non nuls de $\mathbb{K}$

Soit $D = \text{pgcd}(A; B)$; il existe 2 polynômes U et V de $\mathbb{K}$ tels que :
 $A \cdot U + B \cdot V = D$

Si A et B sont premiers entre-eux alors $A \cdot U + B \cdot V = 1$

4. PPCM

Soient A et B deux polynômes non nuls de $\mathbb{K}$

Le $\text{ppcm}(A; B)$ est l'unique polynôme M de plus bas degré tel que :
 $A \mid M$ et $B \mid M$

5. Factorisation

a. Racine d'un polynôme

Soit P un polynôme non nul ; si α est une racine de P alors :
 $P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow X - \alpha \mid P$

Multiplicité d'une racine : Il y a équivalence pour les propositions suivantes :

- α est une racine de multiplicité k de P
- $P = (x - \alpha)^k \cdot Q$
- $P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$

b. Théorème de d'Alembert-Gauss

Tout polynôme de degré ≥ 1 admet au moins 1 racine sur $\mathbb{C}$

Tout polynôme de degré ≥ 1 admet au plus n racines sur $\mathbb{K}$

c. Polynômes irréductibles

Un polynôme est irréductible lorsque l'on ne peut pas le factoriser sur $\mathbb{K}$

d. Factorisation

Tout polynôme non constant peut être factorisé comme un produit de polynômes irréductibles :

$$A = \lambda P_1^{k_1} P_2^{k_2} \dots P_r^{k_r}$$

- Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}$

Les polynômes irréductibles ont pour degré 1

- Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}$

Les polynômes irréductibles ont pour degré 1 ou 2 (discriminant ≤ 0)