Cinématique du point – Exercices – Devoirs

Exercice 1

On donne les équations horaires d'un point M sous la forme :

- $\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = 4t + 2 \end{cases}$ - $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t^2 + 2 \end{cases}$ - $\begin{cases} x = 2\cos(t) + 2 \\ y = 2\sin(t) - 1 \end{cases}$
- Détermine pour les trois cas l'équation de la trajectoire décrite par le point M.
- Déduire pour chacun des cas les composantes du vecteur vitesse et accélération du point M .

Exercice 2

Un mobile M décrit une hélice circulaire d'axe Oz ; on le repère par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) ; l'équation de la trajectoire est :

$$\begin{cases} r = 5 \\ \theta = 10 \cdot t \\ z = 3(1 - 10 \cdot t) \end{cases}$$

On lâche le mobile à $t=0$ et il effectue 2 tours avant d'atteindre le plan $z=0$

1. Exprimer le vecteur vitesse $\vec{v}$ du mobile, dans la base $\mathfrak{B}\{\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z}\}$.
2. Exprimer la norme v du vecteur vitesse
3. On nomme ds la longueur élémentaire parcourue par le mobile pendant la durée dt. Après avoir relier ds à v, exprimer la distance parcourue par le mobile.
4. Exprimer le vecteur accélération et commenter.

Exercice 3

Un mobile subit un mouvement circulaire de rayon R_0 et d'équation **$\Theta(t) = a\, t^2$** où **a = C^{te}**.

Trouver sa vitesse et son accélération.

Exercice 6

Exercice 4

Pour chacune des questions, indiquer les propositions exactes :

1) Le vecteur accélération d'un point M :

a) est égal à la variation de la vitesse par unité de temps ;

b) est égal à la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse instantanée ;

c) possède, lorsqu'on l'exprime dans une base orthonormée, des coordonnées obtenues en dérivant les coordonnées correspondantes du vecteur vitesse.

2) Le vecteur accélération d'un point M en **mouvement rectiligne accéléré** est :

a) toujours porté par la trajectoire ;

b) de même sens que le vecteur vitesse ;

c) toujours de valeur constante.

3) Le vecteur accélération d'un point M se déplaçant sur une **trajectoire curviligne** est :

a) tangent à la trajectoire ;

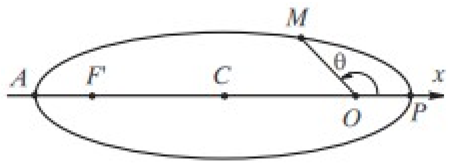
b) dirigé vers l'intérieur de la trajectoire ;

c) nul si la vitesse de M est constante.

Exercice 5

L'équation polaire d'un ellipse avec origine au foyer est $r = \dfrac{3}{1 + 0{,}5 \cdot \cos\theta}$

1. Représenter l'ellipse en utilisant la convention suivante



2. Sachant que $r^2 \cdot \dot{\theta} = 3$ déterminer $\vec{v}$ dans la base $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ en fonction de θ

3. Construire $\vec{v}$ pour $\theta = 0$, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, $\theta = \pi$, $\theta = \dfrac{3 \cdot \pi}{2}$

4. Construire $\vec{a}$ pour $\theta = 0$, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, $\theta = \pi$, $\theta = \dfrac{3 \cdot \pi}{2}$ en supposant le mouvement à force centrale

Exercice 6

Dans le plan (xOy) d'un repère $\mathcal{R}(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$, un point P possède à l'instant t les coordonnées : $x = ct^2$ et $y = bt$, où c et b sont des constantes positives.

1. Former l'équation cartésienne du support de la trajectoire et le représenter.
2. **a)** Calculer les composantes du vecteur vitesse $\vec{v}_{P/\mathcal{R}}$.

   b) Calculer les composantes du vecteur accélération $\vec{a}_{P/\mathcal{R}}$. Que peut-on dire de $\vec{a}_{P/\mathcal{R}}$?

   c) Sur la figure de la question **1.**, rajouter les vecteurs $\vec{v}_{P/\mathcal{R}}$ et $\vec{a}_{P/\mathcal{R}}$.
3. **a)** Calculer $\|\vec{v}_{P/\mathcal{R}}\|$. Le mouvement est-il accéléré, retardé ou uniforme ?

   b) Déterminer la composante tangentielle a_t de $\vec{a}_{P/\mathcal{R}}$.

   c) En déduire la composante normale a_n de $\vec{a}_{P/\mathcal{R}}$.
4. **a)** Calculer $\cos\alpha$, sachant que $\alpha = (\vec{e}_x, \vec{v}_{P/\mathcal{R}})$.

   b) A l'aide de $\|\vec{a}_{P/\mathcal{R}}\|$ et de α, retrouver la composante normale a_n.

Exercice 7

Dans le repère cartésien $\mathcal{R}(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$, un point P se déplace dans le plan (xOy). Ses coordonnées polaires sont ρ et φ, et ses coordonnées cartésiennes x et y à l'instant t, sont telles que : $x(t) = \rho\, cos(\omega t)$ et $y(t) = \rho\, sin(\omega t)$.

1. Exprimer les coordonnées cylindriques ρ et φ en fonction de x et y.
2. Sur un dessin, représenter le repère cartésien, le point P et la base polaire $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$
3. Calculer $\left[\frac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi}\right]_{\mathcal{R}}$ et $\left[\frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi}\right]_{\mathcal{R}}$ en projection dans la base cartésienne $\mathcal{B}$ liée à $\mathcal{R}$.
4. En déduire les expressions de ces dérivées vectorielles dans la base cylindrique $\mathcal{B}_{cyl}$.
5. φ étant fonction du temps, calculer à l'aide de la question précédente les expressions de $\left[\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right]_{\mathcal{R}}$ et $\left[\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}\right]_{\mathcal{R}}$ dans $\mathcal{B}_{cyl}$ en fonction de $\frac{d\varphi}{dt}$.
6. Grâce aux questions précédentes, retrouver les expressions du vecteur vitesse $\vec{v}_{P/\mathcal{R}}$ et du vecteur accélération $\vec{a}_{P/\mathcal{R}}$ dans la base polaire en fonction du temps. En déduire la nature du mouvement.
7. Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire. Montrer que celle-ci est un cercle.
8. Déduire de l'expression de $\|\vec{a}_{P/\mathcal{R}}\|$ le rayon du cercle.
9. Pourquoi $\left[\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right]_{\mathcal{R}_{cyl}} = \vec{0}$ et $\left[\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}\right]_{\mathcal{R}_{cyl}} = \vec{0}$?
10. Calculer $\left[\frac{d\vec{e}_x}{dt}\right]_{\mathcal{R}_{cyl}}$ et $\left[\frac{d\vec{e}_y}{dt}\right]_{\mathcal{R}_{cyl}}$ en projection sur $\mathcal{B}_{cyl}$, puis en projection sur $\mathcal{B}$.

Exercice 8

Un « disque vynile 33 tr », placé sur la platine du tourne-disque, effectue un mouvement de rotation uniforme à raison de 33 tours par minute. Calculer :

1) sa vitesse angulaire de rotation, sa période et sa fréquence ;

2) la vitesse et les accélérations (normale, tangentielle et totale) d'un point M à la périphérie du disque (rayon $R = 15\,cm$).

Exercice 9

Une voiture accélère sur une route rectiligne (direction $+\vec{e}_x$) de façon constante à partir du repos jusqu'à la vitesse $v_0 = 30\ \mathrm{ms}^{-1}$ en $t = 10$ s. Elle roule ensuite à vitesse constante dans la même direction. On assimile la voiture à un point matériel M. On observe son mouvement par rapport au référentiel lié à la route.

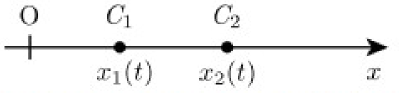
1. On note a_0 l'accélération de la voiture. Déterminer et tracer l'évolution de la vitesse $\vec{v}(t)$. En déduire la valeur de a_0.
2. Calculer $x(t)$ puis déterminer la distance que parcourt la voiture pendant la phase d'accélération. Tracer $x(t)$.
3. Déterminer la distance parcourue pendant que sa vitesse passe de $v = 20\ \mathrm{ms}^{-1}$ à v_0.

Exercice 10

En vue d'un semi-marathon, deux coureurs s'entraînent ensemble. Le coureur 1 est en retard pour l'entrainement et doit rattraper le coureur 2 durant un laps de temps qu'il faut déterminer.

On note C_1 le coureur 1 et C_2 le coureur 2 (voir figure ci-dessous). C_1 voulant rattraper C_2, il court avec une accélération constante $\vec{a}_1 = a_1\vec{e}_x$ telle que a_1= 0,01m.s^{-2}. Le coureur C_2, lui, court à une vitesse constante de 4 m.s^{-1} dans le sens $\vec{e}_x$.

A l'instant initial, le coureur C_1 part de l'origine du repère d'espace avec une vitesse de 5 m.s^{-1}, sachant qu'au même instant le coureur C_2 a déjà parcouru 500 m. On repère la position de C_1 sur la ligne droite par $x_1(t)$ et la position de C_2 par $x_2(t)$.

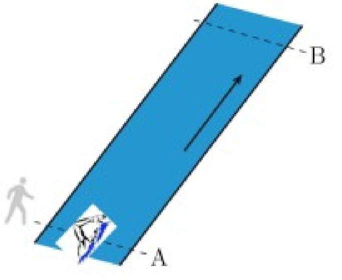


1. Comment qualifiez-vous le mouvement de C_1 et celui de C_2 ?
2. Déterminer l'abscisse $x_1(t)$ du coureur 1.
3. Déterminer l'abscisse $x_2(t)$ du coureur 2.
4. Déterminer le temps mis par C_1 pour rattraper C_2.
5. En déduire l'abscisse du point de rencontre.

Exercice 11

On considère un nageur et un marcheur. Les deux sont supposés se déplacer à la même vitesse : le nageur nage à 2 m.s^{-1} par rapport à l'eau et le marcheur se déplace à 2 m.s^{-1} par rapport au sol.

Ces deux personnages font l'aller-retour en ligne droite et sans s'arrêter d'un point A à un point B, puis retour en A. La distance entre A et B est de 6 m. La rivière coule à une vitesse de 1 m.s^{-1} de A vers B.



Quel personnage revient en premier en A ? Justifiez votre réponse par le calcul.