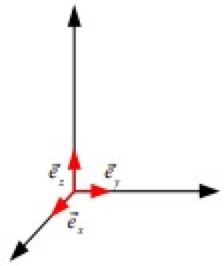
Cinématique du point – Fiche de cours

1. Systèmes de coordonnées

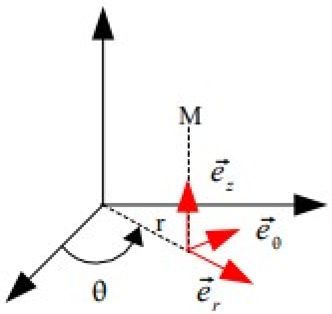
a. Coordonnées cartésiennes



$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$$

$[O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z]$ est le trièdre de référence

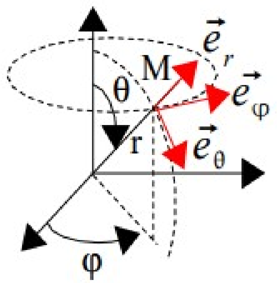
b. Coordonnées cylindriques



On a: $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z$

où $[O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z]$ est le trièdre de référence.

c. Coordonnées sphériques



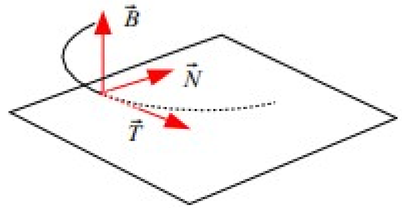
On a: $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r$ où $[O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi]$ est le trièdre de référence.

r est la rayon vecteur, $\theta \in [0, \pi]$ est la colatitude

et $\varphi \in [0, 2\pi]$ est la longitude

d. Coordonnées en base de Frenet

$\vec{T}$ est le vecteur tangent, $\vec{N}$ est le vecteur normal.



La base de Frenet est définie pour des mouvements plans

2. Vitesse et accélération

a. Vitesse

Soit un trièdre [O,x,y,z], on définit la vitesse par $\boxed{\vec{v} = \dfrac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt}}$

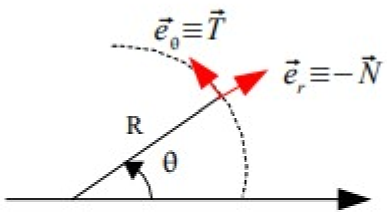
cartésiennes	$\vec{v} = \dot{x}\,\vec{e}_x + \dot{y}\,\vec{e}_y + \dot{z}\,\vec{e}_z$
cylindriques	$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{z}\,\vec{e}_z$
sphériques	$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$
Frenet	$\vec{v} = \dot{s}\,\vec{T}$ avec $\dot{s} = \lVert\vec{v}\rVert$

b. Accélération

Soit un trièdre [O,x,y,z], on définit l'accélération par $\boxed{\vec{a} = \dfrac{d^2\,\overrightarrow{OM}}{dt^2}}$

cartésiennes	$\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{e}_x + \ddot{y}\,\vec{e}_y + \ddot{z}\,\vec{e}_z$
cylindriques	$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\,\vec{e}_z$
Sphériques	$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\theta + (2\dot{r}\sin\theta\,\dot{\varphi} + r\sin\theta\,\ddot{\varphi} + 2r\cos\theta\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi$
Frenet	$\vec{a} = \ddot{s}\,\vec{T} + \dfrac{\dot{s}^2}{R}\vec{N}$ avec $R = \dfrac{v^3}{\lVert\vec{v} \wedge \vec{a}\rVert}$ rayon de courbure de la trajectoire

c. Mouvement circulaire



$$\boxed{\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z}$$

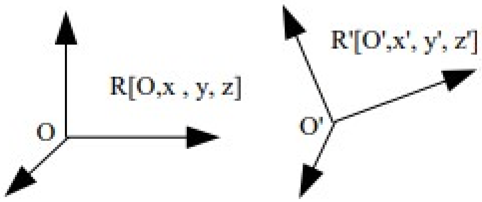
$$\vec{v} = R\omega\,\vec{e}_\theta = R\omega\,\vec{T} \quad \text{soit} \quad \boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}}$$

$$\vec{a} = R\dot{\omega}\,\vec{e}_\theta - R\omega^2\vec{e}_r = R\dot{\omega}\,\vec{T} + R\omega^2\vec{N}$$

3. Changement de référentiel

a. Vitesse

Soient deux référentiel R et R' caractérisés par le vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega_{R'/R}} = \vec{\Omega}$



$$\left[\frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt}\right]_R = \left[\frac{d\,\overrightarrow{OO'}}{dt}\right]_R + \left[\frac{d\,\overrightarrow{O'M}}{dt}\right]_{R'} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$\vec{v}_a = \left[\frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt}\right]_R$ la vitesse absolue et $\vec{v}_r = \left[\frac{d\,\overrightarrow{O'M}}{dt}\right]_{R'}$ la vitesse relative,

$\boxed{\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e}$ avec $\boxed{\vec{v}_e = \vec{v}_{O'} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}}$ vitesse d'entrainement.

b. Accélération

Soit $\vec{a}_a = \left[\frac{d^2\,\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right]_R$ l'accélération absolue et $\vec{a}_r = \left[\frac{d^2\,\overrightarrow{O'M}}{dt^2}\right]_{R'}$ l'accélération relative, on a:

$\boxed{\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c}$ avec $\boxed{\vec{a}_e = \vec{a}_{O'} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M})}$ accélération d'entrainement et

$\boxed{\vec{a}_c = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r}$ accélération de Coriolis.