Dynamique du point – Exercices – Devoirs

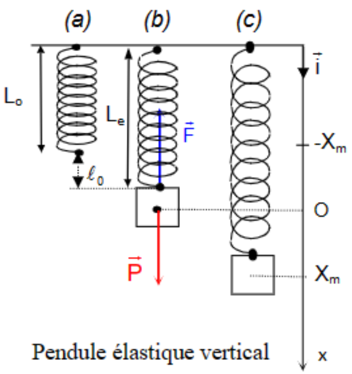
Exercice 1

Au cours d'une séance de travaux pratiques, on souhaite étudier les caractéristiques d'un pendule élastique.
Pour cela, on dispose d'un pendule élastique vertical constitué d'un ressort, de masse négligeable et de constante de raideur k*, auquel on accroche un solide de masse* m.
Le ressort s'allonge alors d'une longueur ℓ_0 *: une position d'équilibre est atteinte.*
À partir de cette position d'équilibre, on étire le ressort verticalement puis on le lâche.
Le système effectue alors des oscillations libres de part et d'autre de sa position d'équilibre avec une amplitude X_m *et une pseudo-période* T.

Le schéma ci-dessous représente le dispositif :

(a) Ressort à vide (longueur L_0)
(b) Ressort à l'équilibre : phase statique (longueur L_e)
(c) Ressort en oscillation : phase dynamique

La position du centre d'inertie du solide est repérée par son abscisse x dans le repère $(O, \vec{i})$.



Pendule élastique vertical

Intensité de la pesanteur : $g = 9{,}8\ N.kg^{-1}$.

1. Étude statique

On mesure l'allongement ℓ_0 *du ressort pour différentes valeurs de masse m. Les résultats expérimentaux sont rassemblés dans le tableau suivant :*

Masse m (10^{-3} kg)	20	40	60	80	100
Allongement ℓ_0 (10^{-2} m)	4,0	8,1	12,2	16,2	20,2

1.1. Exprimer l'allongement ℓ_0 en fonction de L_0 et de L_e.

1.2. Établir, en justifiant, la relation entre m, g, k et ℓ_0 à l'équilibre.

1.3. En utilisant le graphique figure 1 de **l'annexe II à rendre avec la copie**, déterminer la valeur de la constante de raideur k du ressort.

2. Étude dynamique

Pour les même valeurs de masse m que dans la partie 1, on mesure avec un chronomètre la durée de dix oscillations. Les résultats expérimentaux sont donnés ans le tableau suivant :

Masse m (10^{-3} kg)	20	40	60	80	100
Durée de dix oscillations (s)	4,06	5,75	6,95	8,03	8,96

2.1. Pour un oscillateur non amorti, l'équation différentielle vérifiée par l'abscisse x du centre d'inertie du solide s'écrit : $m.\frac{d^2x}{dt^2} + k.x = 0$.

Dans le cas présent, la solution de cette équation est : $x = X_m.\cos(\frac{2\pi t}{T_0})$

2.1.1. Que représente T_0 ?

2.1.2. Montrer que : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

2.2. En réalité, l'amplitude du mouvement ne reste pas constante. Le mouvement est alors qualifié de pseudo-périodique.

2.2.1. Comment évolue l'amplitude du mouvement au cours du temps ?
Comment le justifier ?

2.2.2. À quelle condition, la pseudo-période T est-elle très proche de T_0 ?
Dans la suite de l'exercice, on considérera que cette condition est vérifiée.

2.2.3. Comment procéder pour que la mesure de T soit la plus précise possible ?

2.2.4. Choisir l'une des représentations fournies sur la figure 2 de **l'annexe II à rendre avec la copie** pour déterminer la valeur de k et la calculer.

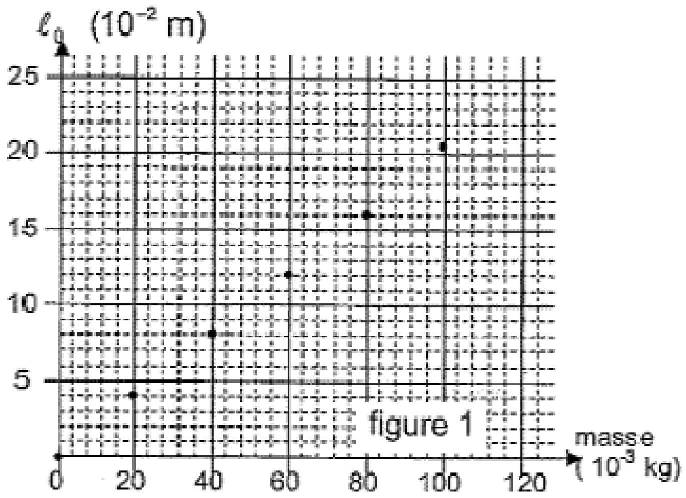


figure 1

constante de raideur du ressort
2. Étude dynamique
question 2.2.4

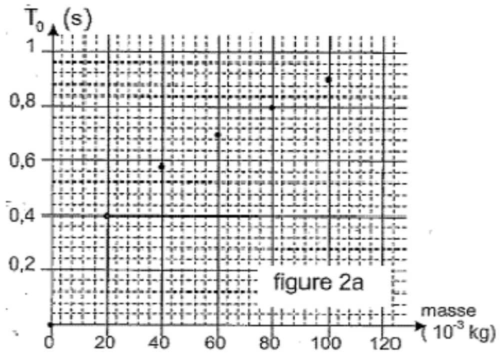


figure 2a

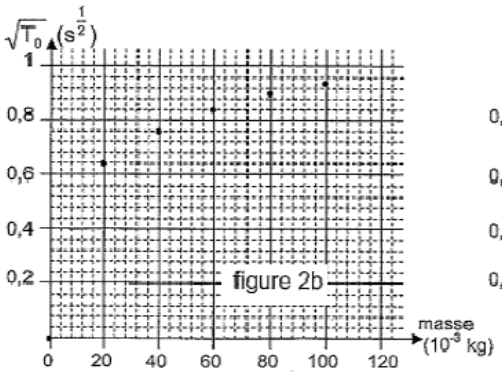


figure 2b

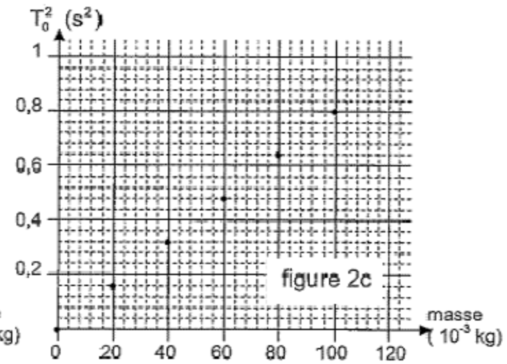


figure 2c

Exercice 2

Un bouchon en liège est maintenu au fond d'un récipient rempli d'eau. On le lâche.

1) Que va faire le bouchon ?
2) On étudie le système bouchon. Celui-ci est soumis à deux forces. Lesquelles ? Tu donneras leur nom et leurs caractéristiques.
3) Le bouchon possède un volume de 0,250 dm^3. La masse volumique du liège est de 0,2 kg.L^{-1}. Celle de l'eau est de 1 kg.L^{-1}. On rappelle que 1 L = 1 dm^3.
   a) Calcule la masse du bouchon.
   b) En déduire son poids. On rappelle que g = 9,81 N.kg^{-1}.
   c) Calcule l'intensité de la poussée d'Archimède.
   d) Représente, sur un schéma, un bouchon dans l'eau ainsi que les deux forces subies par le bouchon. On prendra comme échelle 1 cm pour 0,5 N.

Exercice 3

Un iceberg flotte en mer. On considèrera que l'eau salée possède la même masse volumique que l'eau douce (1 kg.L^{-1} = 1 000 kg.m^{-3}). On veut trouver le volume émergé d'un iceberg.

1) On étudie le système iceberg. Celui-ci est soumis à deux forces. Lesquelles ? Tu donneras leur nom et leurs caractéristiques.
2) Le volume de l'iceberg est de 170 m^3. Sachant que la masse volumique de la glace est de 900 kg.m^3, quelle est la masse de cet iceberg ?
3) En déduire l'intensité de son poids.
4) Que vaut l'intensité de la poussée d'Archimède ? Justifie.
5) On note Pa, la poussée d'Archimède. On montre que le volume immergé (en m^3) de l'iceberg peut se calculer par : V(immergé) = $\dfrac{Pa}{\rho(eau)\times g}$ Calcule ce volume.
6) Déduis-en le pourcentage du volume émergé de l'iceberg qu'un bateau peut observer par rapport au volume total de l'iceberg ($\dfrac{V(iceberg)-V(immergé)}{V(iceberg)}\times 100$).

Exercice 4

Dans le référentiel géocentrique ($\mathcal{R}_g$) considéré comme Galiléen, en choisissant convenablement les conditions initiales de lancement, la trajectoire d'un satellite peut être circulaire et uniforme. Sa vitesse v_s est alors appelée vitesse de satellisation.

Considérons donc un satellite assimilé à un point matériel M de masse m, en mouvement circulaire uniforme autour de la Terre, de masse M_T. Le plan de la trajectoire passe par le centre O de la Terre choisi comme origine du repère tournant $(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$, tel que $\overrightarrow{OM} = r_0\vec{e}_\rho$ où r_0 est le rayon de la trajectoire.

1. Ecrire le principe fondamental de la dynamique pour le satellite M.
2. Exprimer son accélération $\vec{a}_{M/\mathcal{R}_g}$ dans la base polaire, en fonction de v_s et r_0.
3. En déduire l'expression de v_s en fonction de la constante de gravitation G, M_T et r_0.
4. Etablir l'expression du rapport $\frac{T_s^2}{r_0^3}$, où T_s est la période de révolution du satellite, en fonction de G et M_T. Conclure.
5. En considérant la Lune comme un point matériel évoluant sur une trajectoire circulaire à 390 000 km du centre de la Terre, calculer sa vitesse de satellisation et sa période de rotation autour de la Terre. Conclure.

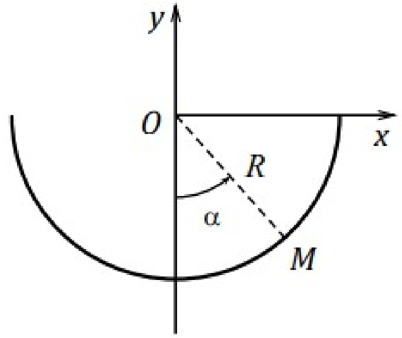
Données : $G = 6.67\times10^{-11}$ SI et $M_T = 6\times10^{24}$ kg

6. Un satellite est géostationnaire s'il est fixe par rapport au référentiel terrestre. Sa trajectoire circulaire et uniforme s'effectue alors dans le plan de l'équateur avec la même vitesse angulaire ω_T que celle de la Terre.

Sachant que la durée d'un jour sidéral est $T = 86\ 164$ s, calculer ω_T.

7. Exprimer le rayon r_0 de la trajectoire du satellite en fonction de G, M_T et ω_T.
8. En déduire l'altitude d'un satellite géostationnaire par rapport à la surface de la Terre.

Exercice 5

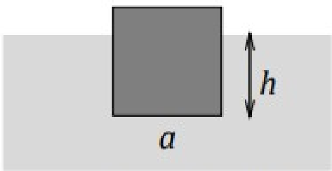


Une bille assimilée à un point matériel M de masse m, glisse sans frottement à l'intérieur d'un bol en forme de demi-sphère de rayon R. Lâchée sans vitesse initiale à $t = 0$, la bille évolue dans un plan médian du bol noté (xOy). Sa position est repérée par l'angle α, et on note α_0 la valeur de l'angle à $t = 0$.

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par α, pour $t \geq 0$.
2. Dans le cas où $\alpha_0 << 1$, déterminer la période des oscillations de la bille au fond du bol.

Exercice 6

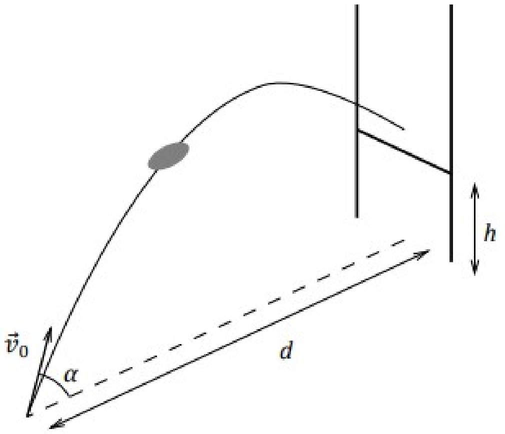
Un bloc de bois, de côté a et de masse volumique ρ_b, flotte sur l'eau de masse volumique ρ (on a donc $\rho_b < \rho$). Soit $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur dirigée vers le bas.



1. Exprimer la profondeur h dont il s'enfonce à l'équilibre, en fonction de a, ρ_b et ρ.
2. On repère le centre de masse M du cube par sa profondeur d'immersion z. Exprimer la position d'équilibre z_0 de M, en fonction de a et h.
3. On enfonce légèrement le cube dans l'eau puis on le relâche. Trouver la période des oscillations du cube autour de sa position d'équilibre, en fonction de g et h.

Exercice 7

Un joueur de rugby tente une pénalité face aux poteaux, à une distance d de ceux-ci. Le coup de pied du joueur communique au ballon, modélisé par un point matériel M de masse m, une vitesse initiale $\vec{v}_0$ contenue dans le plan médian des poteaux, de norme v_0 et inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale.



I. Etude de la trajectoire du ballon

Le référentiel d'observation $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ lié au sol est supposé galiléen. Son origine O est confondue avec la position initiale du ballon. Le plan médian est muni du repère (xOz), où l'axe (Oz) est vertical et dirigé vers le haut. On néglige les frottements avec l'air et on prendra l'accélération de la pesanteur $g = 9.81$ m.s^{-2}.

1. Etablir les équations donnant les coordonnées du ballon dans le plan (xOz) au cours du temps.
2. En déduire l'équation cartésienne $z(x)$ de la trajectoire.
3. Exprimer la portée L ainsi que l'altitude maximale z_m atteinte par le ballon en fonction de v_0, α et g.
4. Pour une vitesse initiale donnée, pour quelle valeur de α la portée maximale est-elle obtenue ?

II. Comment réussir la pénalité ?

Pour que la pénalité soit réussie, le ballon doit franchir les poteaux en passant au-dessus de la barre transversale.

1. Exprimer la valeur minimale $v_{0,min}$ de la vitesse initiale nécessaire pour réussir la pénalité, en fonction de α, g, d et h.
2. Quelle contrainte doivent satisfaire α, h et d pour qu'une solution soit possible ?
3. Exprimer $v_{0,min}$ pour $\alpha = \pi/4$.
4. Que devient cette expression si le tireur est loin par rapport à la hauteur de la barre ?
5. Faire l'application numérique pour $h = 3$ m, $d = 40$ m, $\alpha = 30°$.