# Théorie des tests statistiques – Fiche de cours

## 1. Les tests statistiques

### a. Objectif d'un test statistique

Déterminer si la différence observée est liée à des fluctuations d'échantillonnage ou à une vraie différence

### b. Etapes du test

- Formuler l'hypothèse nulle $H_0$ « $=$ » vis à vis de la population (ou des 2 populations)
- Formuler l'hypothèse alternative $H_1$ unilatérale « > ou < » ou bilatérale « $\neq$ »
- Choisir le risque $\alpha$
- Choisir le type de test (test en Z / Student / $\chi^2$ ) et définir le seuil $s$
- on calcule la statistique du test $x_0$ et le degré de signification p pour le test en Z / Student (probabilité que $H_0$ soit fausse)
- Conclusion du test :
    - si $p>\alpha$ et $x_0<s$ , on ne peut pas rejeter $H_0$
    - si $p<\alpha$ ou $x_0>s$ , on rejette $H_0$

### c. Les erreurs de test

- erreur de première espèce $\alpha$ : rejeter à tort $H_0$ alors qu'elle est vraie
- erreur de deuxième espèce $\beta$ : ne pas rejeter $H_0$ alors qu'elle est fausse

## 2. Tests statistiques paramétriques

### a. Types de tests

- comparer une population à une référence
- comparer 2 populations entre-elles

### b. Comparaison d'une moyenne à une valeur théorique

- Test de l'écart réduit

  Condition $N \geq 30$

  Le seuil au risque $\alpha$ est donné par la table de la loi normale

- Test de Student

  Condition pour toute valeur de N ; distribution normale ; distribution à N-1 ddl

  Le seuil au risque $\alpha$ est donné par la table de la loi de Student

- Statistique du test

$$z_0 = \frac{m - \mu_{H_0}}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}}$$

### c. Comparaison de deux moyennes

- Test de l'écart réduit

  Condition $N_1 \geq 30$ et $N_2 \geq 30$

  Le seuil au risque $\alpha$ est donné par la table de la loi normale

- Test de Student

  Condition pour toute valeur de $N_1$ et $N_2$ ; égalité des variances ; distribution normale ; distribution à $N_1$+$N_2$-2 ddl

  Le seuil au risque $\alpha$ est donné par la table de la loi de Student

- Vocabulaire
  - Echantillons appariés : mesures effectuées sur les mêmes individus mais à des moments différents
  - Echantillons indépendants : mesures effectuées sur des individus différents

- Statistique du test

$$t_0 = \frac{m_1 - m_2}{\sqrt{s^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \quad \text{avec} \quad s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

# 3. Tests statistiques non-paramétriques

## a. Types de test

- test de $\chi^2$ de conformité ou d'adéquation (comparer des fréquences ou des moyennes échantillon-référence ou échantillon-échantillon)
- test de $\chi^2$ d'indépendance
- test de $\chi^2$ d'homogénéité (comparer l'origine des échantillons)

## b. Tableau de contingence des effectifs observés

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $\ldots B_j \ldots$ | $B_k$ | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $O_{11}$ | $O_{12}$ | $O_{13}$ | $\ldots$ | $O_{1k}$ | $a_1$ |
| $A_2$ | $O_{21}$ | $O_{22}$ | $O_{23}$ | $\ldots$ | $O_{2k}$ | $a_2$ |
| $A_3$ | $O_{31}$ | $O_{32}$ | $O_{33}$ | $\ldots$ | $O_{3k}$ | $a_3$ |
| $A_i$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $O_{ij}$ | $\ldots$ | $a_i$ |
| $A_l$ | $O_{l1}$ | $O_{l2}$ | $O_{l3}$ | $\ldots$ | $O_{lk}$ | $a_l$ |
| Total | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $\ldots b_j \ldots$ | $b_k$ | $N$ |

$$ddl = (Colonne - 1) \cdot (Ligne - 1)$$

## c. Tableau de contingence des effectifs attendus

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $\ldots B_j \ldots$ | $B_k$ | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $E_{11}$ | $E_{12}$ | $E_{13}$ | $\ldots$ | $E_{1k}$ | $a_1$ |
| $A_2$ | $E_{21}$ | $E_{22}$ | $E_{23}$ | $\ldots$ | $E_{2k}$ | $a_2$ |
| $A_3$ | $E_{31}$ | $E_{32}$ | $E_{33}$ | $\ldots$ | $E_{3k}$ | $a_3$ |
| $A_i$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $E_{ij}$ | $\ldots$ | $a_i$ |
| $A_l$ | $E_{l1}$ | $E_{l2}$ | $E_{l3}$ | $\ldots$ | $E_{lk}$ | $a_l$ |
| Total | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $\ldots b_j \ldots$ | $b_k$ | $N$ |

$$E_{ij} = \frac{a_i \cdot b_j}{N}$$

## d. Statistique du test

Condition : tous les $E_{ij} \geq 5$

$$\chi_0 = \frac{(O_{11} - E_{11})^2}{E_{11}} + \frac{(O_{12} - E_{12})^2}{E_{12}} + \ldots \frac{(O_{lk} - E_{lk})^2}{E_{lk}}$$

## e. Remarque

Lorsque $E_{ij} < 5$ on peut réaliser un test exact de Fisher