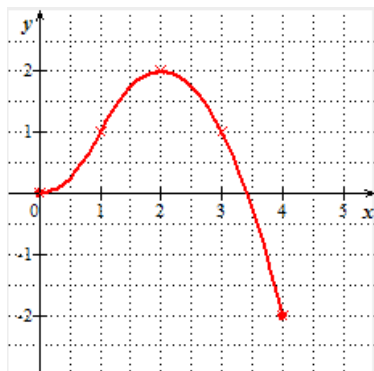


Continuité et convexité – Exercices – Devoirs

Exercice 1 corrigé disponible

La fonction donnée ci dessous représente une fonction définie sur $[0 ; 4]$.



- 1.a. Donner le tableau de variation de f .
- 1.b. La fonction f est-elle continue sur $[0 ; 4]$?
- 2.a. Pour résoudre l'équation $f(x) = \frac{3}{2}$, quel théorème peut-on appliquer ?
- 2.b. Sur l'intervalle $[2 ; 4]$, montrer que l'équation $f(x) = \frac{3}{2}$ admet 2 solutions α et β tel que $\alpha < \beta$.
- 2.c. Donner une valeur approchée de α et β .

Exercice 2 corrigé disponible

$$\text{Soit } f : x \mapsto \begin{cases} e^{3x} + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{2+x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. f est-elle continue en 0 ? Justifier.
2. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Justifier.

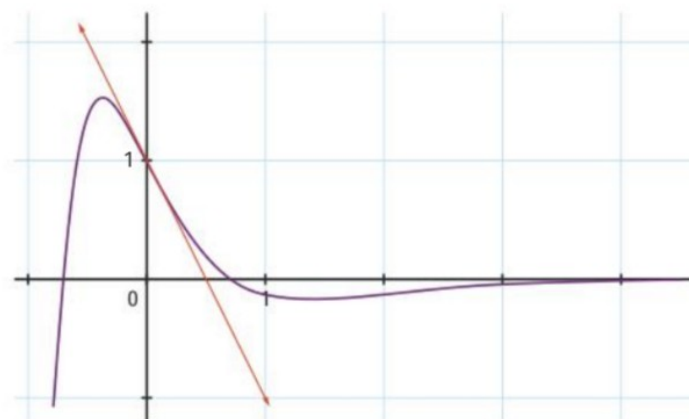
Exercice 3 corrigé disponible

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$

1. Dresser le tableau de variations de $f(x)$
2. Justifier que $f(x) = 2$ admet 3 solutions sur $[-4 ; 4]$

Exercice 4 corrigé disponible

La courbe représentative d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ est donnée ci-dessous.



Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer, en justifiant, si elle est vraie ou fausse.

1. $f'(0) = -1$
2. $f'(1) = 0$
3. $f''(1) < 0$
4. $f'(x) > 0$ sur $[2 ; 3]$.

5. f est concave sur $[0;3]$
6. Si f est la fonction dérivée d'une fonction g , alors g est décroissante sur $[1;3]$
7. Si f est la fonction dérivée d'une fonction g , alors g est concave sur $[0;0,5]$

Exercice 5 corrigé disponible

Trouver la valeur de k telle que la fonction définie par

$$f: x \mapsto \begin{cases} x^2 + e^{x-1} & \text{si } x \leq 1 \\ x + k & \text{si } x > 1 \end{cases} \text{ soit continue sur } \mathbb{R}.$$

Exercice 6 corrigé disponible

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 4x^3 - 15x^2 - 18x + 12.$$

On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f .
2. Établir la convexité de la fonction f .
3. Déterminer les coordonnées des éventuels points d'inflexion de C_f .

Exercice 7 corrigé disponible

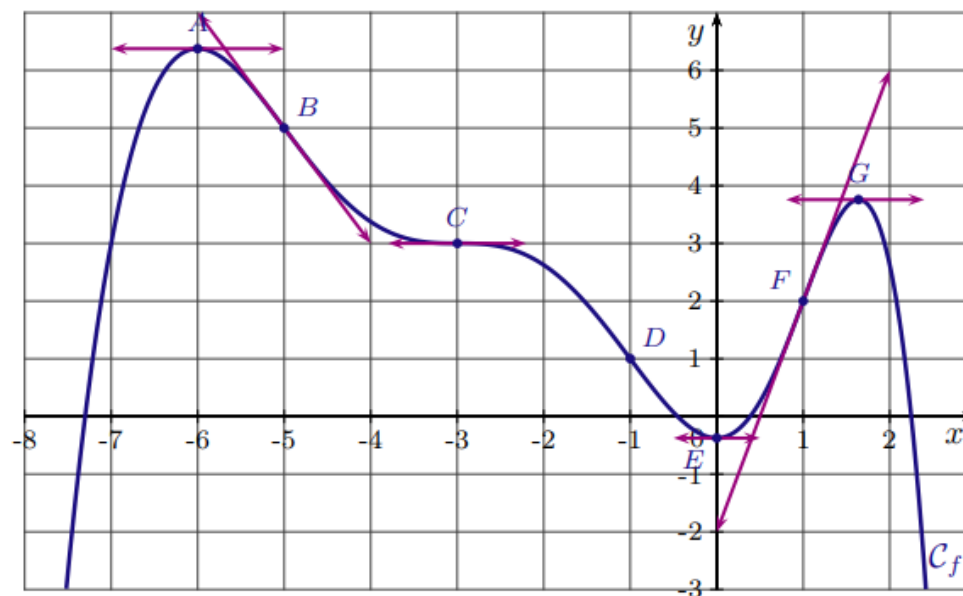
Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = (5 - x^2)\sqrt{x}.$$

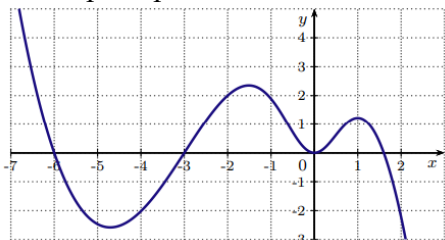
1. Déterminer la fonction dérivée g' et la fonction dérivée seconde g'' pour tout réel x strictement positif.
2. Étudier le signe de $g''(x)$ sur $]0; +\infty[$.
3. En déduire la convexité de g

Exercice 8 corrigé disponible

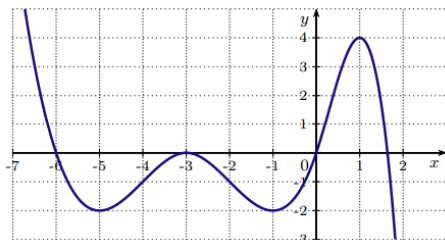
Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative C_f d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.



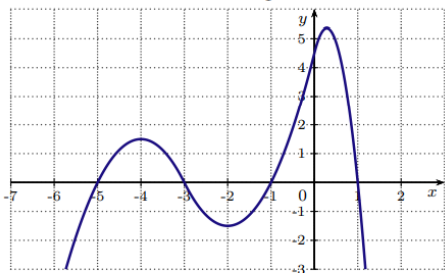
Une des quatre courbes C_1 , C_2 , C_3 et C_4 ci-dessous est la courbe représentative de la dérivée f' et une autre la courbe représentative de la dérivée seconde f'' . Déterminer la courbe qui représente la dérivée f' et celle qui représente la dérivée seconde f'' .



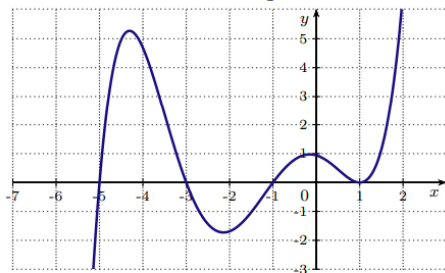
Courbe C_1



Courbe C_2



Courbe C_3



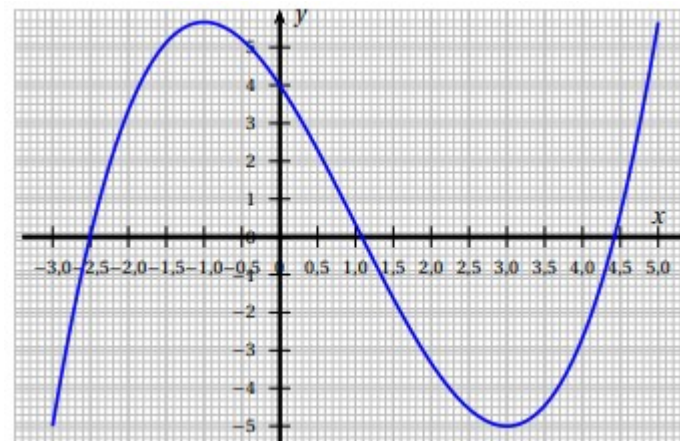
Courbe C_4

Exercice 9 corrigé disponible

Partie A

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-3 ; 5]$. La courbe ci-contre est la courbe représentative de la fonction dérivée f' de f .

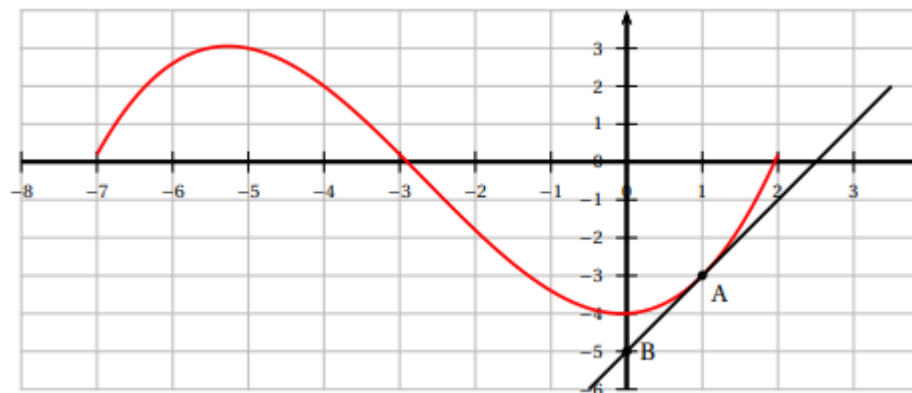
1. La fonction f est croissante sur l'intervalle :
 - a. $[1,5 ; 4]$
 - b. $[-2 ; 0]$
 - c. $[0 ; 2]$
 - d. $[3 ; 4]$
2. La fonction f est concave sur l'intervalle :
 - a. $[1,5 ; 4]$
 - b. $[-2 ; 0]$
 - c. $[0 ; 2]$
 - d. $[3 ; 4]$



Partie B

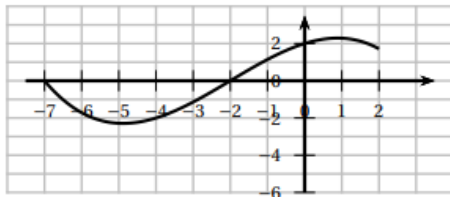
La courbe ci-dessous représente une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $[-7 ; 2]$.

La tangente au point $A(1 ; -3)$ coupe l'axe des ordonnées au point $B(0 ; -5)$

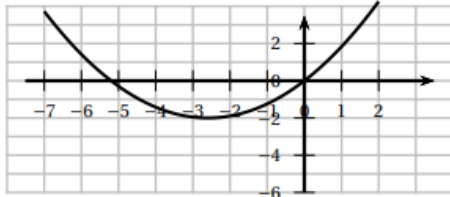


3. L'une des quatre courbes suivantes représente la fonction g' dérivée de la fonction g . Laquelle ?

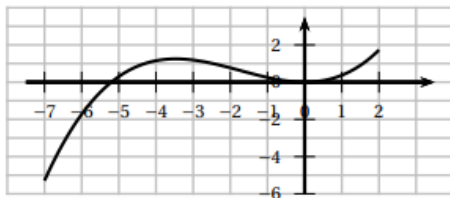
a.



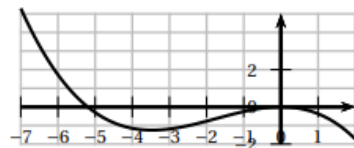
b.



c.



d.



4. L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point A est :

- a. $y = -3x + 1$ b. $y = x - 5$ c. $y = 2x - 5$ d. $y = x - 4$

Partie C

5. Soit f la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des réels par

$f(x) = 5e^{-\frac{x}{3}}$. La dérivée f' de la fonction f vaut :

a. $f'(x) = \frac{-5x}{3} e^{-\frac{x}{3}}$

c. $f'(x) = -\frac{5}{3} e^{-\frac{x}{3}}$

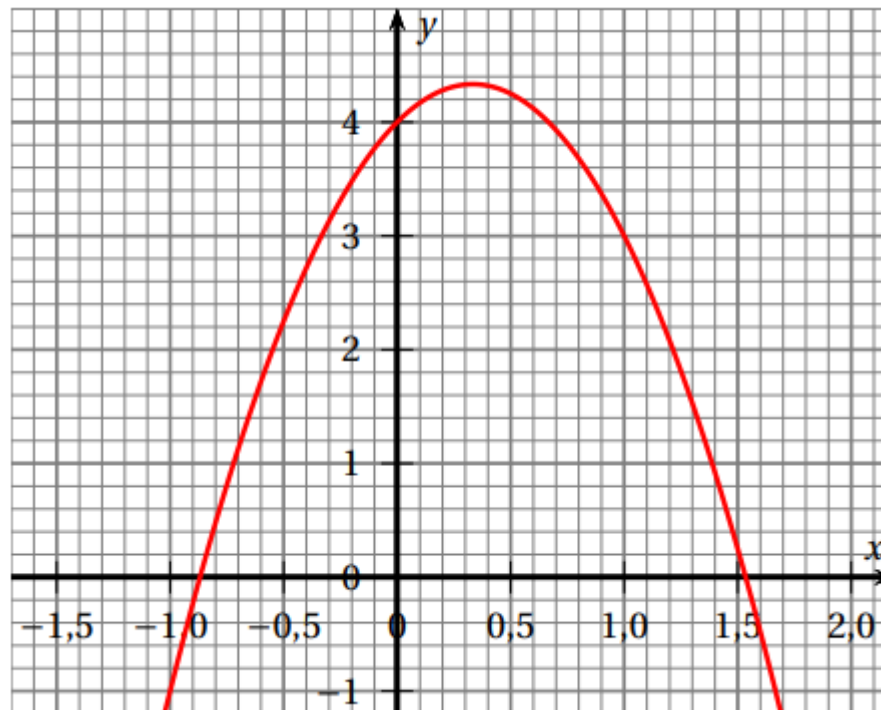
b. $f'(x) = 5e^{-\frac{x}{3}}$

d. $f'(x) = e^{-\frac{x}{3}}$

On considère la courbe ci-dessous représentative de la fonction f définie sur l'ensemble des réels par $f(x) = -3x^2 + 2x + 4$.

Dans l'algorithme ci-après, a et b sont deux réels. Quelle est la valeur de a en sortie de l'algorithme ?

- a. 1,54 b. 1,48 c. -0,86 d. -0,87



```

a ← 0
b ← 4
Tant que b > 0
    a ← a + 0,01
    b ← -3a^2 + 2a + 4
Fin Tant que
    
```

Exercice 10 corrigé disponible

On s'intéresse à la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2(x+2) \cdot e^{-x}$

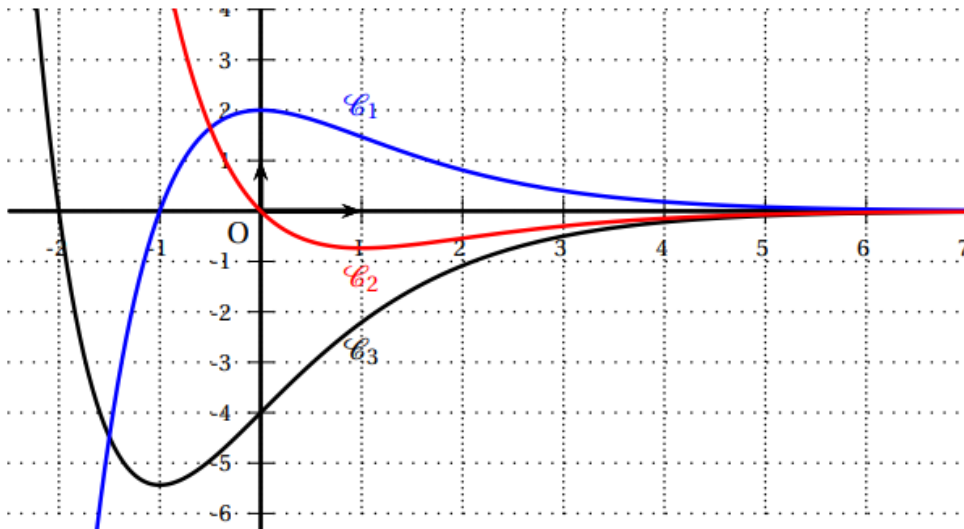
Partie A

1. Calculer $f(-1)$ et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
2. Justifier que $f'(x) = 2(x+1)e^{-x}$ où f' est la fonction dérivée de f .
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f .

Partie B

Dans le repère orthogonal on a représenté ci-dessous trois courbes C_1, C_2 et C_3 .

4. L'une de ces courbes représente la fonction f , une autre représente sa dérivée et une troisième représente sa dérivée seconde. Dire lesquelles
5. Indiquer un intervalle sur lequel la fonction f est convexe ; précisez s'il existe un point d'inflexion à la courbe.



Exercice 11 corrigé disponible

On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3 ; 1]$.

x	-3	-1	0	1
Variations de f	-6	-1	-2	4

Proposition : L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[-3 ; 1]$.

Exercice 12 corrigé disponible

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[-2 ; 4]$ par

$$f(x) = (2x+1)e^{-2x} + 3.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère. Une représentation graphique est donnée en annexe.

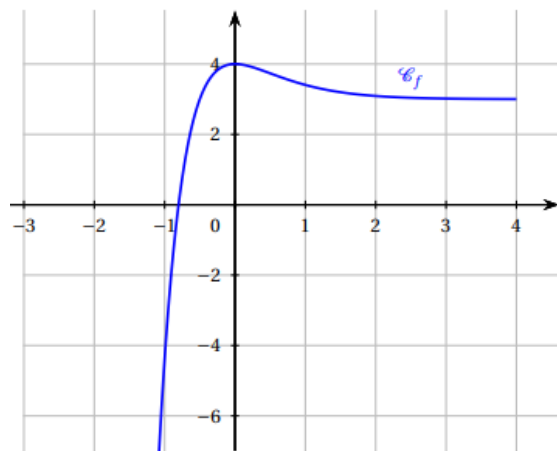
1. On note f' la fonction dérivée de f . Montrer que, pour tout $x \in [-2 ; 4]$,

$$f'(x) = -4xe^{-2x}.$$

2. Étudier les variations de f .
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-2 ; 0]$ et donner une valeur approchée au dixième de cette solution.
4. On note f'' la fonction dérivée de f' . On admet que, pour tout $x \in [-2 ; 4]$,

$$f''(x) = (8x-4)e^{-2x}.$$

- a. Étudier le signe de f'' sur l'intervalle $[-2 ; 4]$.
- b. En déduire le plus grand intervalle sur lequel f est convexe.



Exercice 13 corrigé disponible

f est la fonction définie sur $[0; 12]$ par

$$f(x) = 2xe^{-x}.$$

Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	Dériver($2 * x * \exp(-x)$)	$-2 * x * \exp(-x) + 2 * \exp(-x)$
2	Factoriser($-2 * x * \exp(-x) + 2 * \exp(-x)$)	$2 * (1 - x) * \exp(-x)$
3	Dériver($2 * (1 - x) * \exp(-x)$)	$2 * x * \exp(-x) - 4 * \exp(-x)$
4	Factoriser($2 * x * \exp(-x) - 4 * \exp(-x)$)	$2 * (x - 2) * \exp(-x)$

- Vérifier le résultat de la ligne 1 donné par le logiciel de calcul formel.

Dans la suite, on pourra utiliser les résultats donnés par le logiciel de calcul formel sans les justifier.

- Dresser le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 12]$ en le justifiant.
 - Démontrer que l'équation $f(x) = 0,5$ admet deux solutions dans $[0; 12]$.
Donner à l'aide de la calculatrice une valeur approchée au centième de chacune de ces solutions.
- Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0; 12]$.

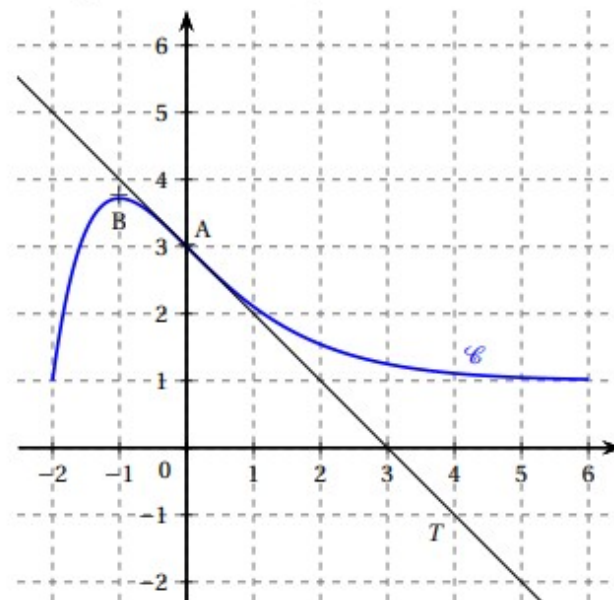
Exercice 14 corrigé disponible

On considère la fonction f définie et dérivable sur $[-2; 6]$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}$ est donnée ci-dessous.

Le point A de coordonnées $(0; 3)$ est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[-2; 6]$.

La droite T est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A.

La courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale au point B d'abscisse -1 .



En utilisant le graphique, répondre aux questions suivantes :

- Déterminer $f(0)$.
- Déterminer $f'(0)$. En déduire une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A.
- Déterminer le signe de f' sur $[-2; 6]$.
- Donner la convexité de $f(x)$ sur $[-2; 6]$ et étudier le signe de $f''(x)$.