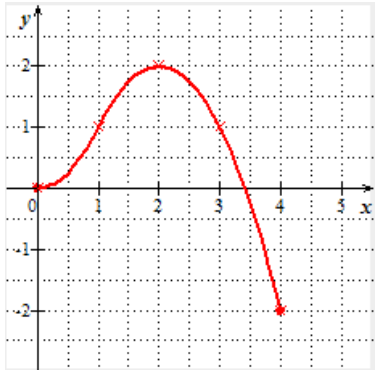
Continuité et convexité – Exercices – Devoirs

Exercice 1 corrigé disponible

La fonction donnée ci dessous représente une fonction définie sur [0 ;4].



1.a. Donner le tableau de variation de f.

1.**b.** La fonction f est-elle continue sur [0 ; 4] ?

2.a. Pour résoudre l'équation $f(x)=\frac{3}{2}$, quel théorème peut-on appliquer ?

2.b. Sur l'intervalle [2 ; 4], montrer que l'équation $f(x)=\frac{3}{2}$ admet 2 solutions α et β tel que $\alpha < \beta$.

2.c. Donner une valeur approchée de α et β.

Exercice 2 corrigé disponible

Soit $f(x)$ la fonction définie part $f(x):\begin{cases} e^{3x}+1 & \text{si } x\leq 0 \\ \sqrt{2+x} & si\ x>0 \end{cases}$

1. f est-elle continue en 0 ?
2. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

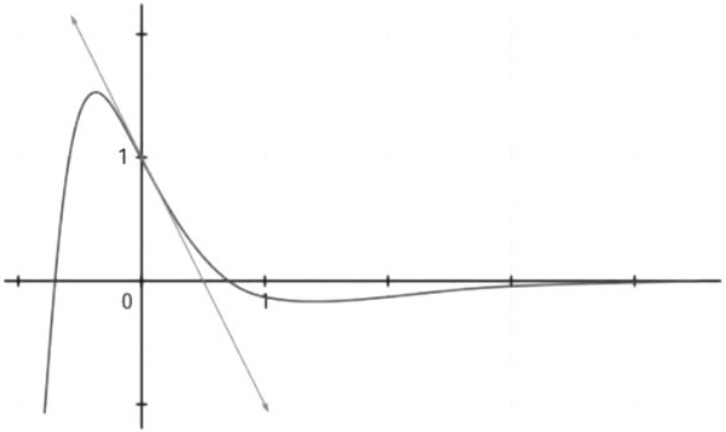
Exercice 3 corrigé disponible

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+3x^2-1$

1. Dresser le tableau de variations de $f(x)$
2. Justifier que $f(x)=2$ admet 3 solutions sur $[-4;4]$

Exercice 4 corrigé disponible

La courbe représentative d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ est donnée ci-dessous.



Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer, en justifiant, si elle est vraie ou fausse.

1. $f'(0)=-1$
2. $f'(1)=0$
3. $f''(1)<0$
4. $f'(x)>0$ sur $[2\ ;\ 3]$.

5. f est concave sur $[0;3]$
6. Si f est la fonction dérivée d'une fonction g, alors g est décroissante sur $[1;3]$
7. Si f est la fonction dérivée d'une fonction g, alors g est concave sur $[0;0,5]$

Exercice 5 corrigé disponible

Trouver la valeur de k telle que la fonction f(x) soit continue sur $\mathbb{R}$

$$f(x):\begin{cases} x^2+e^{x-1} & \text{si } x\leq 1 \\ x+k & si\ x>1 \end{cases}$$

Exercice 6 corrigé disponible

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=4x^3-15x^2-18x+12$$

On note Cf la courbe représentative dans un repère orthonormal

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f
2. Etablir la convexité de la fonction f
3. Déterminer les coordonnées des points d'inflexion à Cf

Exercice 7 corrigé disponible

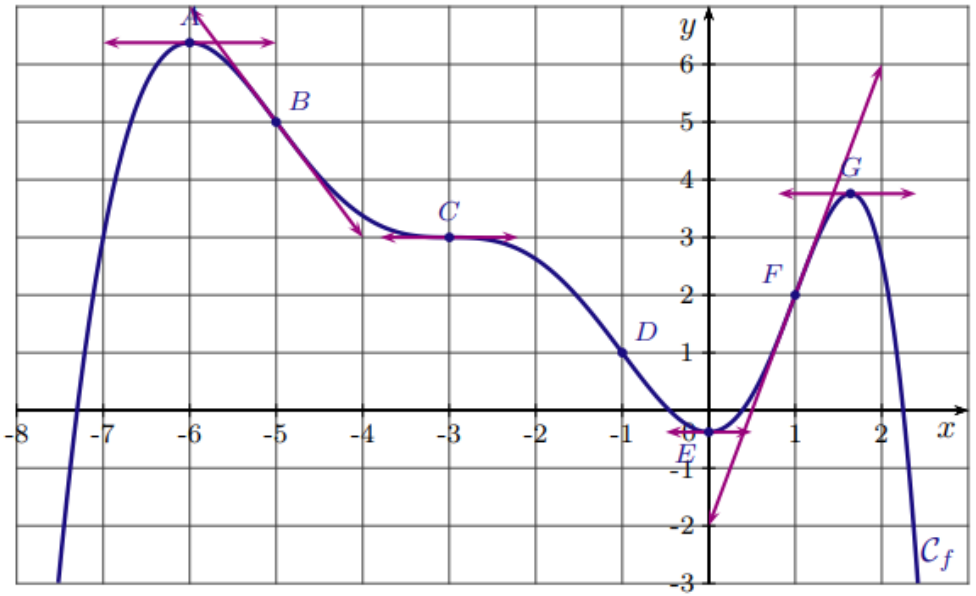
Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$g(x)=(5-x^2)\sqrt{x}.$$

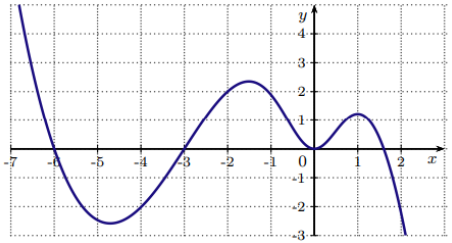
1. Déterminer la fonction dérivée g' et la fonction dérivée seconde g'' pour tout réel x strictement positif.
2. Étudier le signe de $g''(x)$ sur $]0;+\infty[$.
3. En déduire la convexité de g

Exercice 8 corrigé disponible

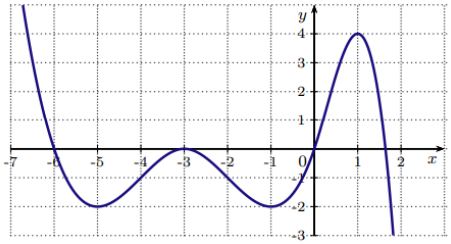
Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative Cf d'une fonction f définie et dérivable sur R.



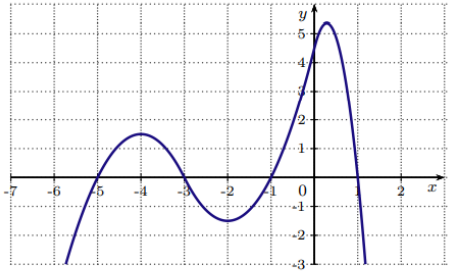
Une des quatre courbes C_1, C_2, C_3 et C_4 ci-dessous est la courbe représentative de la dérivée f ′ et une autre la courbe représentative de la dérivée seconde f ″ . Déterminer la courbe qui représente la dérivée f ′ et celle qui représente la dérivée seconde f ″ .



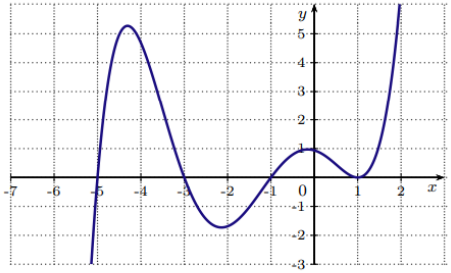
Courbe $\mathcal{C}_1$



Courbe $\mathcal{C}_2$



Courbe $\mathcal{C}_3$



Courbe $\mathcal{C}_4$

Exercice 9 corrigé disponible

Partie A

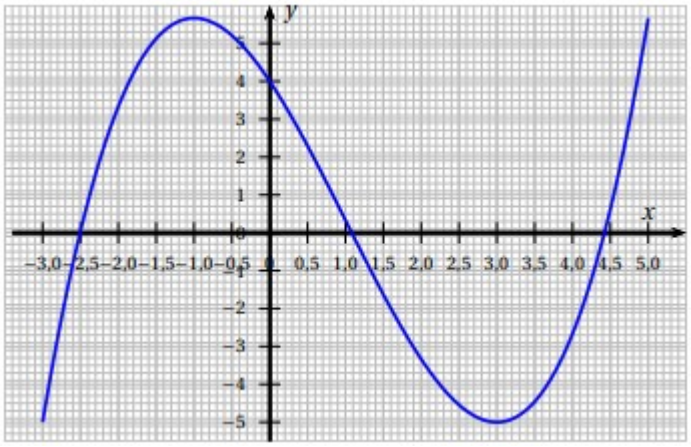
On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle [−3 ; 5].
La courbe ci-contre est la courbe représentative de la fonction dérivée f ′ de f .

1. La fonction f est croissante sur l'intervalle :

a. [1,5; 4] b. [-2; 0] c. [0; 2] d. [3; 4]

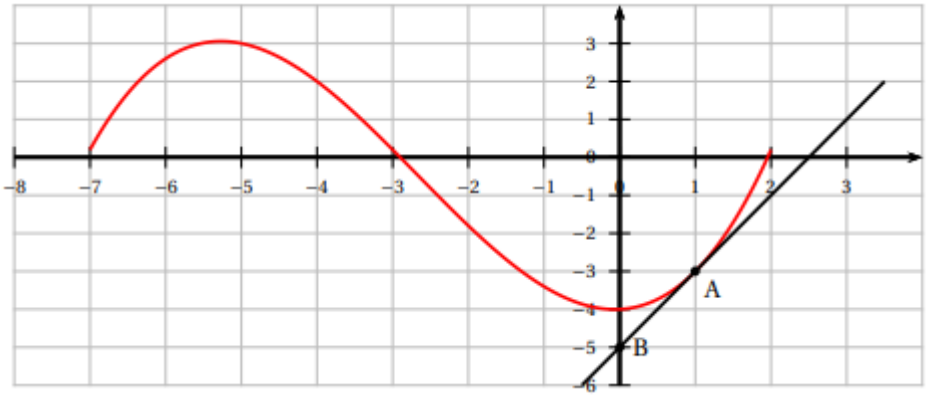
2. La fonction f est concave sur l'intervalle :

a. [1,5; 4] b. [−2 ; 0] c. [0; 2] d. [3; 4]



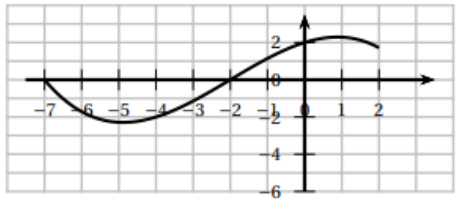
Partie B

La courbe ci-dessous représente une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle [−7 ; 2].
La tangente au point A(1 ; −3) coupe l'axe des ordonnées au point B(0 ; −5)

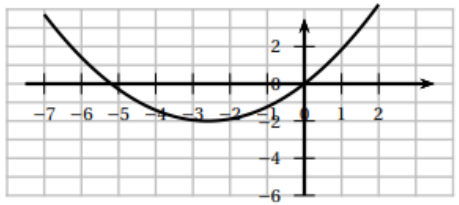


3. L'une des quatre courbes suivantes représente la fonction g ′ dérivée de la fonction g . Laquelle ?

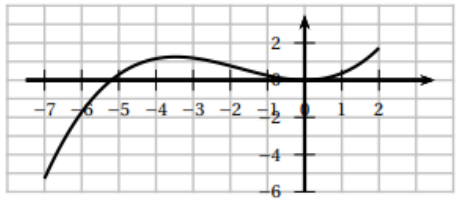
a.



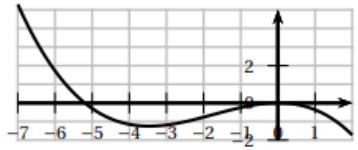
b.



c.



d.



4. L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point A est :

a. y = −3x +1 b. y = x −5 c. y = 2x −5 d. y = x −4

Partie C

5. Soit f la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des réels par $f(x)=5e^{-\frac{x}{3}}$. La dérivée f ′ de la fonction f vaut :

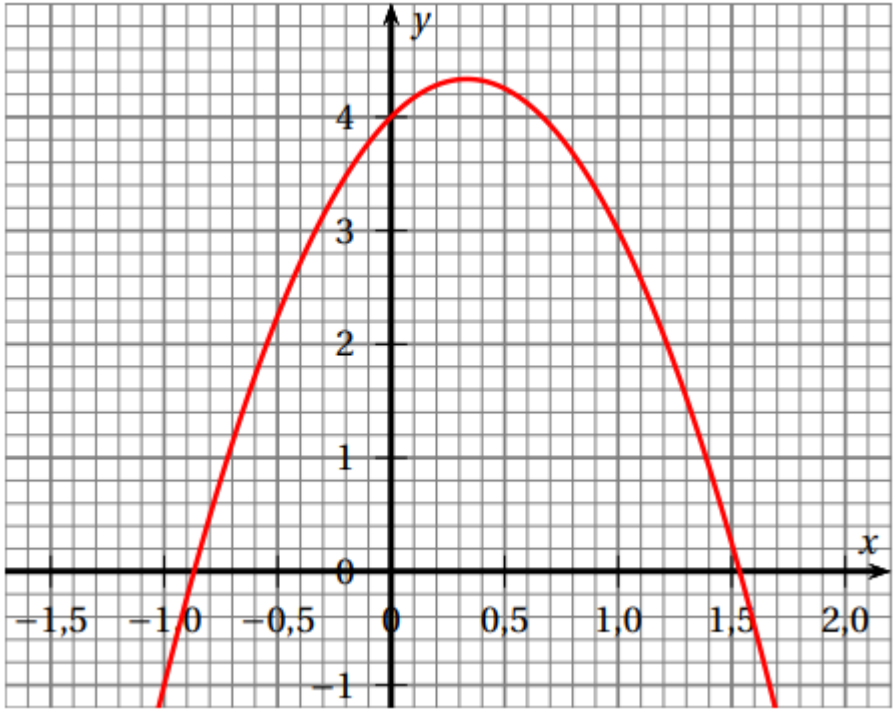
a. $f'(x)=\frac{-5x}{3}e^{-\frac{x}{3}}$ c. $f'(x)=-\frac{5}{3}e^{-\frac{x}{3}}$

b. $f'(x)=5e^{-\frac{x}{3}}$ d. $f'(x)=e^{-\frac{x}{3}}$

On considère la courbe ci-dessous représentative de la fonction f définie sur l'ensemble des réels par $f(x)=-3x^2+2x+4$.

Dans l'algorithme ci-après, a et b sont deux réels. Quelle est la valeur de a en sortie de l'algorithme ?

a. 1,54 b. 1,48 c. −0,86 d. −0,87



$a \leftarrow 0$
$b \leftarrow 4$
Tant que $b > 0$
    $a \leftarrow a + 0,01$
    $b \leftarrow -3a^2 + 2a + 4$
Fin Tant que

Exercice 10 corrigé disponible

On s'intéresse à la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-2(x+2)\cdot e^{-x}$

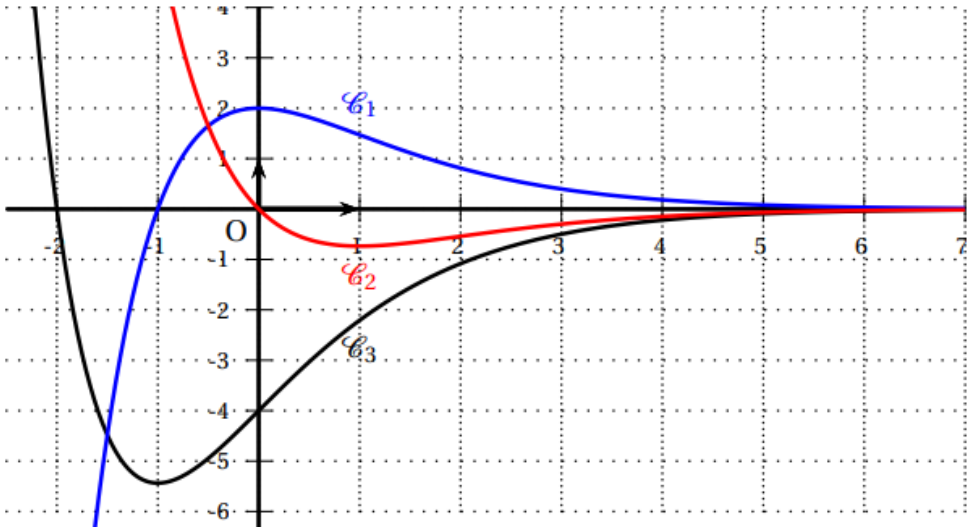
Partie A

1. Calculer f (−1) et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
2. Justifier que f ′ (x) = 2(x +1)e^{-x} où f ′ est la fonction dérivée de f .
3. Dresser le tableau d variations de la fonction f .

Partie B

Dans le repère orthogonal on a représenté ci-dessous trois courbes C_1,C_2 et C_3.

4. L'une de ces courbes représente la fonction f , une autre représente sa dérivée et une troisième représente sa dérivée seconde. Dire lesquelles
5. Indiquer un intervalle sur lequel la fonction f est convexe ; précisez s'il existe un point d'inflexion à la courbe.



Exercice 11 corrigé disponible

On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur l'intervalle [−3 ; 1].

x	−3		−1		0		1
Variations de f	−6	↗	−1	↘	−2	↗	4

Proposition : L'équation f (x) = 0 admet une unique solution dans l'intervalle [−3 ; 1].

Exercice 12 corrigé disponible

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[-2\,;\,4]$ par

$$f(x) = (2x+1)\,e^{-2x} + 3.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans une repère. Une représentation graphique est donnée en annexe.

1. On note f' la fonction dérivée de f. Montrer que, pour tout $x \in [-2\,;\,4]$,

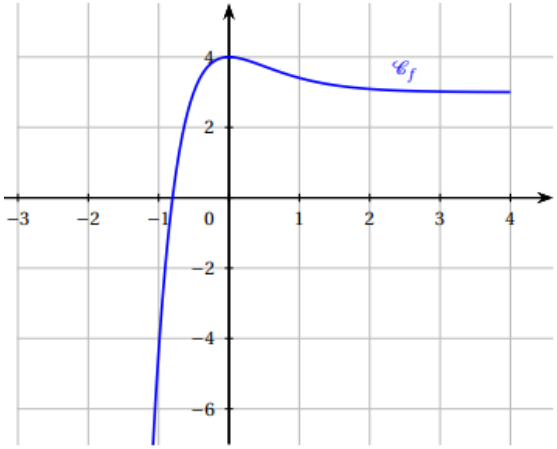
$$f'(x) = -4x\,e^{-2x}.$$

2. Étudier les variations de f.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-2\,;\,0]$ et donner une valeur approchée au dixième de cette solution.
4. On note f'' la fonction dérivée de f'. On admet que, pour tout $x \in [-2\,;\,4]$,

$$f''(x) = (8x-4)\,e^{-2x}.$$

   a. Étudier le signe de f'' sur l'intervalle $[-2\,;\,4]$.

   b. En déduire le plus grand intervalle sur lequel f est convexe.



Exercice 13 corrigé disponible

f est la fonction définie sur $[0;12]$ par

$$f(x) = 2xe^{-x}.$$

Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	Dériver$(2 * x * \exp(-x))$
	$-2 * x * \exp(-x) + 2 * \exp(-x)$
2	Factoriser$(-2 * x * \exp(-x) + 2 * \exp(-x))$
	$2 * (1 - x) * \exp(-x)$
3	Dériver$(2 * (1 - x) * \exp(-x))$
	$2 * x * \exp(-x) - 4 * \exp(-x)$
4	Factoriser$(2 * x * \exp(-x) - 4 * \exp(-x))$
	$2 * (x - 2) * \exp(-x)$

1. Vérifier le résultat de la ligne 1 donné par le logiciel de calcul formel.

Dans la suite, on pourra utiliser les résultats donnés par le logiciel de calcul formel sans les justifier.

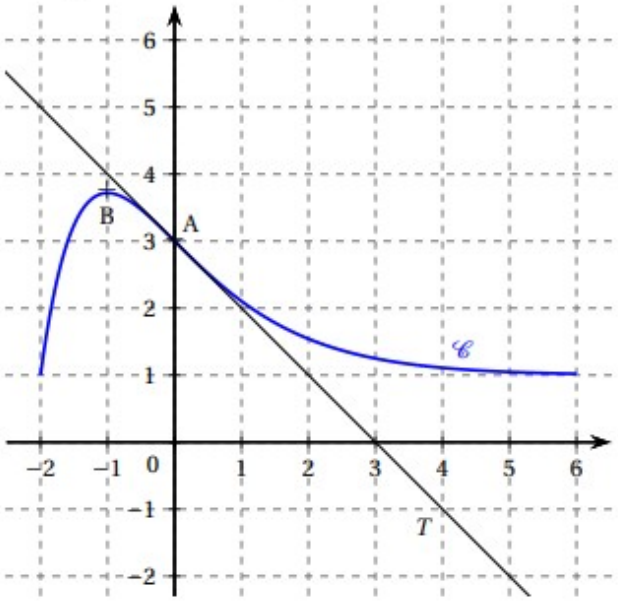
2. **a.** Dresser le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;12]$ en le justifiant.

b. Démontrer que l'équation $f(x) = 0{,}5$ admet deux solutions dans $[0;12]$.
Donner à l'aide de la calculatrice une valeur approchée au centième de chacune de ces solutions.

3. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0;12]$.

Exercice 14 corrigé disponible

On considère la fonction f définie et dérivable sur $[-2;6]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous.
Le point A de coordonnées $(0;3)$ est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[-2;6]$.
La droite T est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.
La courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale au point B d'abscisse -1.



En utilisant le graphique, répondre aux questions suivantes :

1. Déterminer $f(0)$.

2. Déterminer $f'(0)$. En déduire une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.

3. Déterminer le signe de f' sur $[-2;6]$.

4. Donner la convexité de $f(x)$ sur $[-2;6]$ et étudier le signe de $f''(x)$