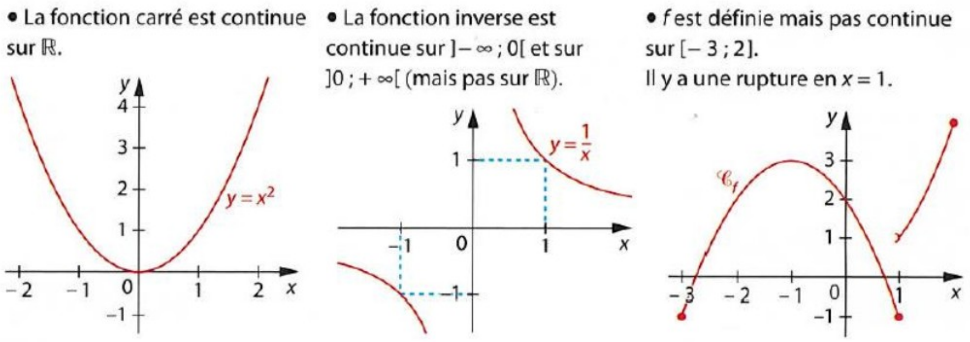
Continuité et convexité – Fiche de cours

1. Notion de continuité

a. Définition

Une fonction définie sur un intervalle *I* est continue si sa courbe représentative ne présente aucune rupture (on peut la tracer sans lever le crayon de la feuille)



Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I :

- f est continue en a lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x)=f(a)$
- f est continue sur un intervalle I lorsqu'elle est continue en tout réel a de cet intervalle

b. Propriétés

- Les fonctions usuelles (affines, carré, inverse, racine carrée, valeur absolue, exponentielles,) sont continues sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.
- Une fonction dérivable sur un intervalle *I* est continue sur *I* ; la réciproque est fausse

2. Théorème des valeurs intermédiaires

On souhaite résoudre l'équation $f(x)=k$

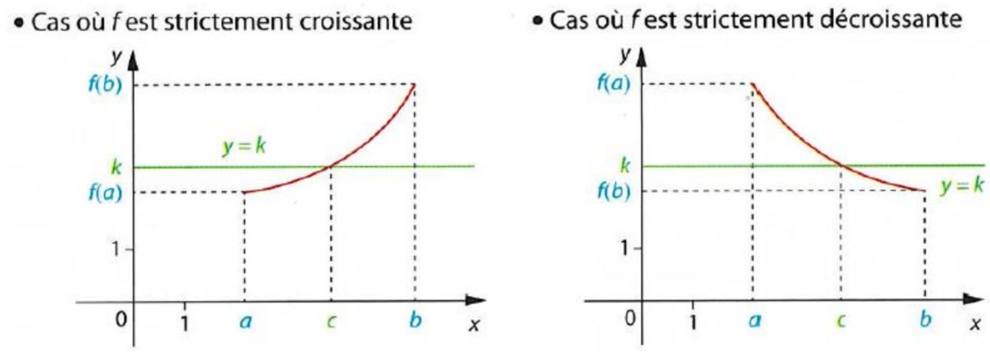
Soit f une **fonction continue et strictement monotone** sur un **intervalle [*a*; *b*].**

Cas de f croissante :

Si $k\in[f(a);f(b)]$ alors il existe un unique $\alpha\in[a\,;b]$ tel que $f(\alpha)=k$

Cas de f décroissante :

Si $k\in[f(b);f(a)]$ alors il existe un unique $\alpha\in[a\,;b]$ tel que $f(\alpha)=k$



3. Dérivée seconde

Lorsque f est dérivable sur I, on appelle f' sa dérivée

Lorsque f' est dérivable sur I, on appelle f'' sa dérivée

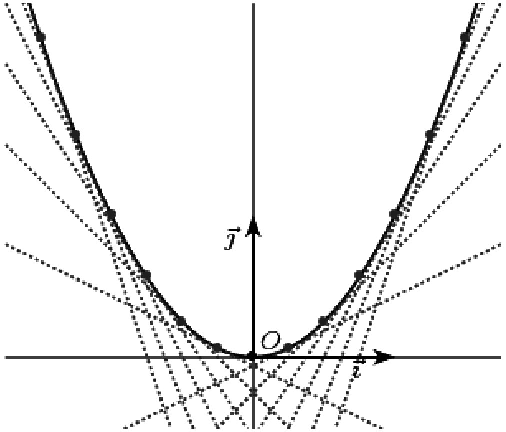
f'' est appelée dérivée seconde de f

3. Convexité

a. Fonctions convexes

Une fonction est dite convexe sur un intervalle [a;b] lorsque la courbe représentative est située :

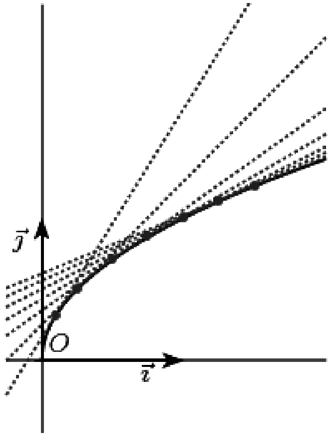
- au dessus de toutes ses tangentes définies sur [a;b]



b. Fonctions concaves

Une fonction est dite concave sur un intervalle [a;b] lorsque la courbe représentative est située :

- au dessous de toutes ses tangentes définies sur [a;b]



c. Point d'inflexion

Un point d'inflexion est un point pour lequel la tangente traverse la courbe.

En ce point f''(x)=0

Un point d'inflexion est également défini comme le changement de convexité d'une fonction.