Fonction logarithme népérien – Exercices - Devoirs

Exercice 1 **corrigé disponible**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\ln(2x-3) = \ln(x+5)$ b) $2\ln(x-3) = \ln 4$

Exercice 2 **corrigé disponible**

Justifier ou infirmer les égalités suivantes :

a) $\ln(72) = 3\ln(2) + 2\ln(3)$ b) $\ln\left(\frac{32}{343}\right) = 4\ln(2) - 3\ln(7)$

c) $\ln(625) = 5\ln(4)$ d) $\ln(0{,}8) = 2\ln(2) - \ln(5)$

e) $\ln\left(\sqrt{\frac{1}{18}}\right) = -\frac{1}{2}(\ln(2) + \ln(3))$

Exercice 3 **corrigé disponible**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $\ln x + \ln(x+2) \leq \ln(x^2 - 2x + 2)$.

b) $\ln(x^2 + 2x + 2) \geq \ln(3-x) + \ln(x+1)$.

Exercice 4 **corrigé disponible**

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(7x)$. b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x\sqrt{2})$.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln(x)}$. d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln\left(-\frac{x}{3}\right)$.

Exercice 5 **corrigé disponible**

Résoudre les équations et inéquations suivantes, après avoir déterminer l'ensemble de définition.

1. $\ln\left(\frac{x-1}{2x-3}\right) = 0$
2. $\ln(4x+2) - \ln(x-1) = \ln x$

Exercice 6 **corrigé disponible**

Rechercher les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 0^+} (2x - 1 + \ln x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - 1 + \ln x)$
2. $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}^+} \ln(4x-6)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(4x-6)$
3. $\lim\limits_{x \to 3^+} \ln\left(\frac{15x+1}{x-3}\right)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{15x+1}{x-3}\right)$

Exercice 7 **corrigé disponible**

Déterminer l'expression de la dérivée des fonctions suivantes

a) sur $[1\,;+\infty[$ par $f(x) = (x+1)\ln x$.

b) sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = \ln(\sqrt{x})$.

c) sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \ln(x^2+1)$.

d) sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = \ln(3x^2 - 2x + 5)$.

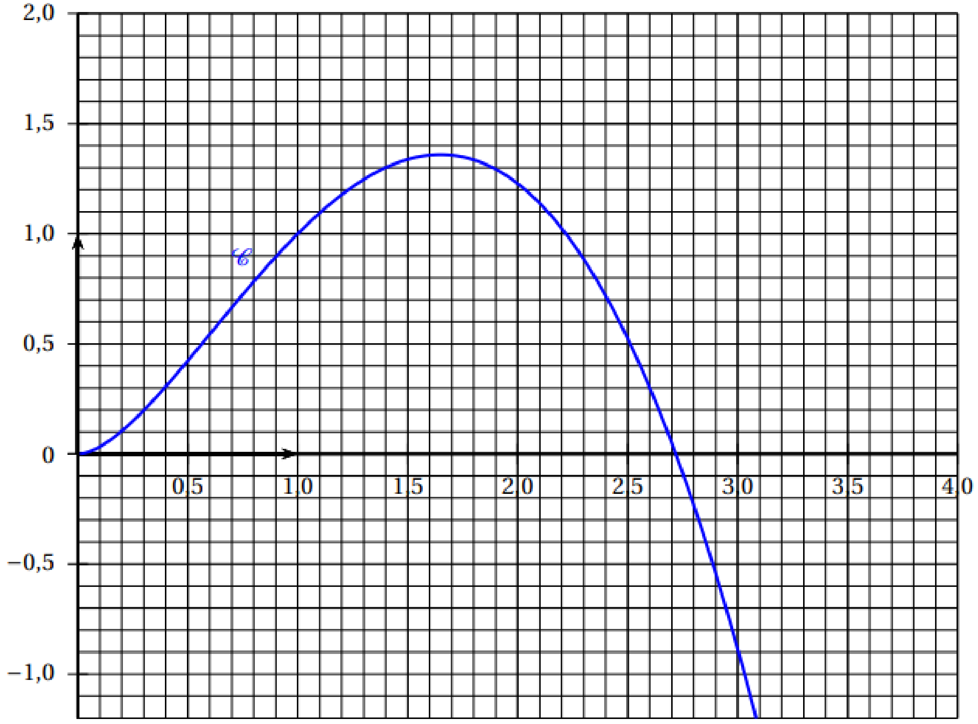
Exercice 8

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;3]$ par :

$$f(x)=x^2\cdot(1-\ln x)$$

On admet que f est deux fois dérivable sur $]0;3]$, on note f ' sa fonction dérivée et f'' sa dérivée seconde f '' définie sur $]0;3]$

On donne ci-dessous sa courbe représentative C.



1. Sur $]0;3]$, C coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse :

a. e   b. 2,72   c. $\frac{1}{2}e+1$

2. C admet un point d'inflexion d'abscisse :

a. e   b. $\frac{1}{\sqrt{e}}$ c. $\sqrt{e}$

3. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;3]$ on a :

a. f ' (x) = x(1−2lnx)   b. f ' (x) = − 2 x   c. f ' (x) = −2

4. Sur l'intervalle [1; 3] :

a. f est convexe   b. f est décroissante   c. f ' est décroissante

5. Une équation de la tangente à C au point d'abscisse e s'écrit :

a. y = −x +e   b. y = −ex   c. y = −ex +e^2

Exercice 9

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle [1; 25] par :

$$f(x)=\frac{x+2-\ln x}{x}$$

a. On admet que f est dérivable sur [1; 25].
Démontrer que pour tout réel x appartient à l'intervalle [1; 25],

$$f'(x)=\frac{-3+\ln x}{x^2}$$

b. Résoudre dans [1; 25] l'inéquation −3+ln(x) > 0.

c. Dresser le tableau des variations de la fonction f sur [1; 25].

d. Démontrer que dans l'intervalle [1; 25], l'équation f (x) = 1,5 admet une seule solution. On notera α cette solution.

e. Déterminer un encadrement d'amplitude 0,01 de α à l'aide de la calculatrice.

2. Une entreprise fabrique chaque jour entre 100 et 2 500 pièces électroniques pour des vidéoprojecteurs. Toutes les pièces fabriquées sont identiques. On admet que lorsque x centaines de pièces sont fabriquées, avec $1\leq x\leq 25$, le coût moyen de fabrication d'une pièce est de f (x) euros. En utilisant les résultats obtenus à la question 1. :

a. Déterminer, à l'unité près, le nombre de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit minimal. Déterminer alors ce coût moyen, au centime d'euro près.

b. Déterminer le nombre minimal de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit inférieur ou égal à 1,50 euro.

c. Est-il possible que le coût moyen d'une pièce soit de 50 centimes ? Justifier

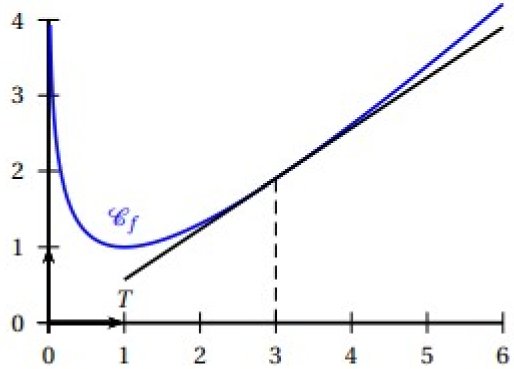
Exercice 10

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par

$$f(x)=x-\ln x$$

On appelle C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ et T la tangente à C_f au point d'abscisse x = 3.

Cette tangente T à C_f passe- t -elle par l'origine du repère ?



Exercice 11

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante

La fonction f est définie sur l'intervalle [0,5; 10] par :

$f(x)=ax+2+b\ln x$ où a et b sont deux nombres réels

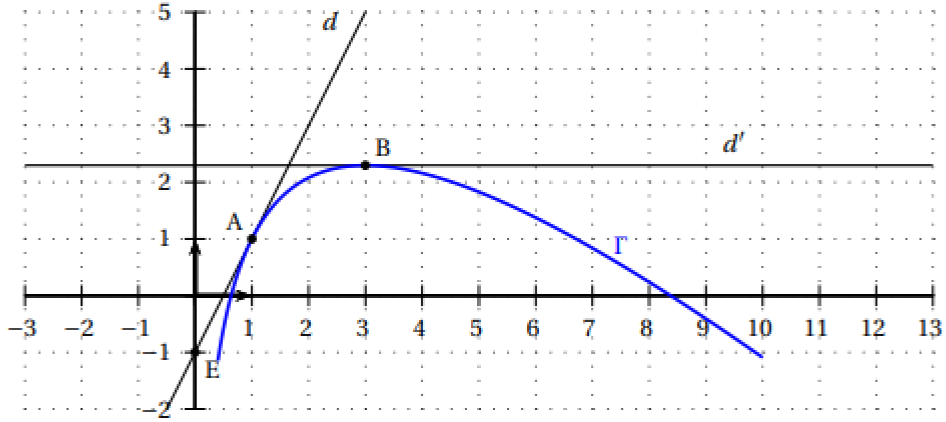
On note f ′ la fonction dérivée de f .

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé :

— la courbe représentative Γ de la fonction f

— la droite d tangente à la courbe Γ au point A de coordonnées (1; 1)

— la droite d ′ tangente à la courbe Γ au point B d'abscisse 3



On sait de plus que :

— la tangente au point A passe par le point E de coordonnées (0 ; −1).

— la tangente au point B est parallèle à l'axe des abscisses.

Partie A

1. Donner par lecture graphique la valeur de f ′ (1), puis celle de f ′ (3).
2. Calculer f ′ (x).
3. En déduire les valeurs des nombres a et b.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle [0,5; 10] par :

$$f(x) = -x +2+3\ln(x)$$

1. Montrer que pour x dans [0,5; 10], f ′ (x) = −x +3 x .
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe Γ au point A d'abscisse 1.
3. Étudier le signe de f ′ (x) sur l'intervalle [0,5; 10], puis dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.
4. Montrer que sur l'intervalle [0,5; 3] l'équation f (x) = 0 admet une unique solution. Donner une valeur approchée de cette solution arrondie au centième.

Exercice 12

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0,5; 5] par :

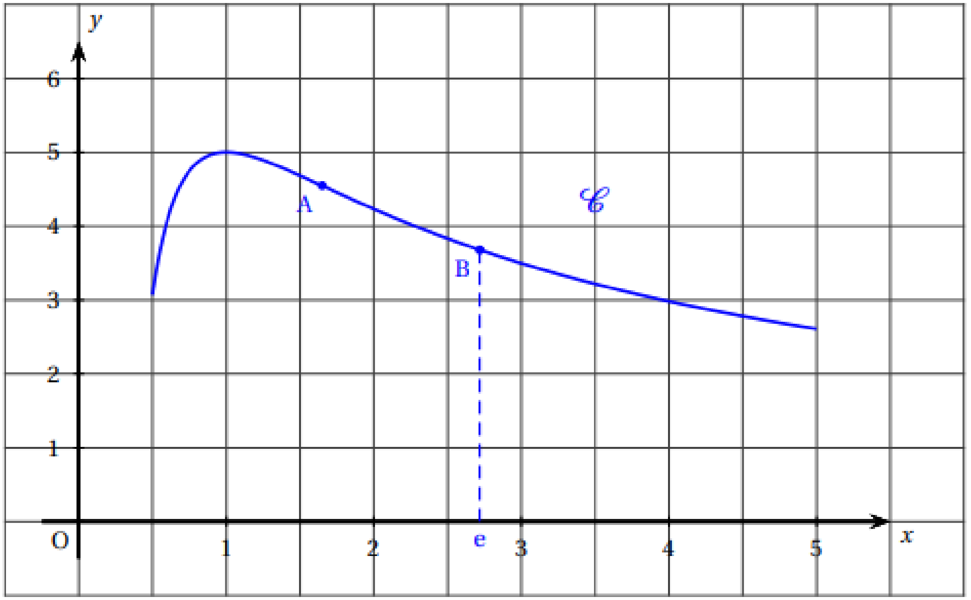
$$f(x)=\frac{5+5\ln x}{x}$$

Sa représentation graphique est la courbe C donnée ci-dessous dans un repère d'origine O.

On admet que le point A placé sur le graphique est le seul point d'inflexion de la courbe C sur l'intervalle [0,5; 5].

On note B le point de cette courbe d'abscisse e.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur cet intervalle.



1. La fonction f ' est :
   a. positive ou nulle sur l'intervalle [0,5; 5]
   b. négative ou nulle sur l'intervalle [1; 5]
   c. négative ou nulle sur l'intervalle [0,5; 1]

2. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe C au point B est égal à :
   a. $-\frac{5}{e^2}$ b. $\frac{10}{e}$ c. $\frac{5}{e^3}$

3. La fonction f ' est :
   a. croissante sur l'intervalle [0,5; 1]
   b. décroissante sur l'intervalle [1; 5]
   c. croissante sur l'intervalle [2; 5]

4. La valeur exacte de l'abscisse du point A de la courbe C est égale à :
   a. 1,65 b. 1,6 c. $e^{0,5}$

Exercice 13

Le bénéfice en milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x milliers de pièces, est donné sur l'intervalle [1; 30] par :

$$B(x)=-0,5x^2+6x-20+2x\ln x$$

1. Montrer que $B'(x)=-x+8+2\ln x$, où B ' est la dérivée de B sur l'intervalle [1; 30].

2. Justifier le tableau de variation ci-dessous de la fonction dérivée B ' sur l'intervalle [1; 30].

x	1	2	30
$B'(x)$		$6+2\ln 2$	
	7 ↗		↘ $-22+2\ln 30$

3. a. Montrer que l'équation B ' (x) = 0 admet une unique solution α sur l'intervalle [1; 30].

3.b. Donner une valeur approchée au millième de la valeur de α.

4. En déduire le signe de B′ (x) sur l'intervalle [1; 30], et donner le tableau de variation de la fonction bénéfice B sur ce même intervalle.

5. Quel est le nombre de pièces à produire, à l'unité près, pour que l'entreprise réalise un bénéfice maximal ? Quel est ce bénéfice maximal (arrondi au millier d'euros) ?

Exercice 14

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [1 ; 10] par :

$$f(x)=x^2-14x+15+20\ln x$$

1. Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle [1 ; 10] on a :

$$f'(x)=\frac{2x^2-14x+20}{x}$$

2. Construire en le justifiant le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [1 ; 10].
3. Etudier la convexité de f(x) et en déduire l'existence éventuelle de points d'inflexion
4. En déduire le nombre de solutions de l'équation f (x) = 3 dans l'intervalle [1 ; 10].

Exercice 15

Exprimer chacun des nombres suivants sous la forme $\ln c$ où c est un réel strictement positif.

$A = 2\ln 5 + \ln 3$

$B = 3\ln 3 - 2\ln 2$

$C = -\ln 5 + 3\ln 2$

$D = 3\ln 4 - 3\ln 2$

Exercice 16

Résoudre les équations suivantes :

1. $\ln(2-x)+1=0$;
2. $\ln x + \ln(x-1) = \ln 5$;
3. $\ln(3x) - \ln(1-x) = \ln 2$.

Exercice 17

Exprimer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$ et $\ln 5$.

a. $\ln 20$ **b.** $\ln 100$ **c.** $\ln 80e$

d. $\ln\sqrt{10}$ **e.** $\ln\frac{5}{4}$ **f.** $\ln\frac{5}{4e}$

Exercice 18

Vrai ou faux ? Justifier.

a. Pour tout réel x strictement positif

$$\ln x^3 - \ln x^2 = \ln x^{25} - \ln x^{24}.$$

b. Pour tout réel x strictement positif

$$(\ln x)^2 + \ln(x^3) > 0.$$

c. $\ln 2 + \ln 2^2 + \ln 2^3 + \ln 2^4 = 10\ln 2$.

Exercice 19

Vrai ou faux ? Justifier.

On note C la courbe de la fonction $f : x \mapsto \ln x$ définie sur $]0;+\infty[$. Soit T et T' les tangentes aux points d'abscisse 3 et 5.

a. C est au-dessus de T.

b. C est au-dessous de T'.

c. La fonction f' est croissante sur $]0;+\infty[$.

d. Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f''(x) \geq 0$.

e. $f'(3) > f'(5)$.

Exercice 20

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \ln x$ et C sa courbe représentative.

1. Déterminer l'équation de la tangente à C au point d'abscisse e.
2. À l'aide de la concavité de f, en déduire le signe de l'expression $\ln x - \frac{x}{e}$ sur $]0;+\infty[$.