Fonction logarithme népérien – Fiche de cours

1. Définitions et propriétés algébriques

a. Définition

La fonction logarithme est définie comme la réciproque de la fonction exponentielle

$$\text{si} \quad x = e^y \quad \text{alors} \quad y = \ln x \quad \text{pour} \quad x > 0$$

b. Propriétés algébriques

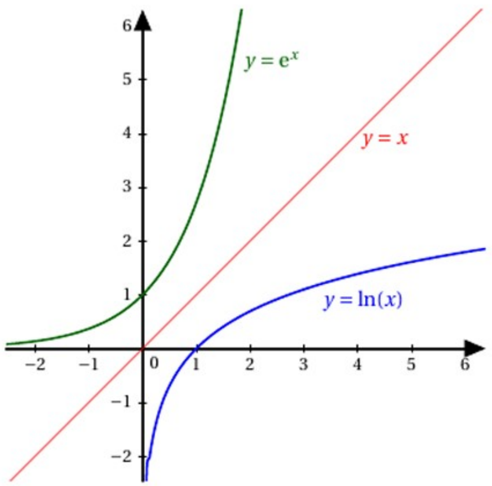
$e^{\ln x} = x \quad \forall x > 0 \quad ; \quad e^{\ln x} = x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad \ln 1 = 0 \quad ; \quad \ln e = 1$

$\ln a \times b = \ln a + \ln b \quad ; \quad \ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b \quad ; \quad \ln a^n = n \cdot \ln a$

$\ln \sqrt{a} = \dfrac{1}{2} \cdot \ln a$

2. Etude de la fonction logarithme

a. Représentation graphique



b. Dérivabilité

La fonction logarithme est définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

La fonction logarithme est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$

Soit une fonction $u(x) > 0$ définie et dérivable sur un intervalle I :

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

c. Egalités et inégalités

$\forall a > 0 \quad \forall b > 0$

$\ln a > \ln b \Leftrightarrow a > b \qquad \ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b \qquad \ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$

c. Limites

$\lim\limits_{x \to 0+} \ln x = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

d. Convexe

La fonction logarithme est concave sur $]0\,;+\infty[$