

Limites de fonctions – Comportement asymptotique - Exercices

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2 + 3x + 4\sqrt{x})$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - x^2 + x + 7)$

Exercice 2

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(5x^2 + 3 - \frac{1}{x} \right)$

2. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(4 - 3x + \frac{3}{x} \right)$

Exercice 3

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 2x - 3)$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x^2 - 5x\sqrt{x})$

Exercice 4

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(-5 + \frac{2}{x} \right)$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 3)(e^x - 5)$

Exercice 5

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1)(3e^x - 2)$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{2 + e^x}$

Exercice 6

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{2x}{x - 1}$

2. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0,5 \\ x < 0,5}} \frac{-1 + x}{2x - 1}$

Exercice 7

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f}{g} \right)(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} (f \times g)(x)$$

1. $f(x) = \frac{1}{x}$

$g(x) = \frac{3}{x}$

2. $f(x) = x^2$

$g(x) = \frac{1}{x}$

3. $f(x) = \frac{x}{1+x}$

$g(x) = \frac{x}{1-x}$

Exercice 8

Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{4x-1}{3x+1}$

2. $f(x) = \frac{x^2+2x-1}{3x^2+5}$

3. $f(x) = \frac{-4x+1}{x^2+1}$

Exercice 9

On définit f sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+x+1}}{x}$

1. Prouver que pour tout réel $x \geq 0$: $4x^2 \leq 4x^2+x+1 \leq (2x+1)^2$

2. En déduire que pour tout réel $x > 0$: $2 \leq f(x) \leq \frac{2x+1}{x}$.

3. Calculer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 10

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{5 - \frac{4}{x^2}}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right)^4$ c) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{\frac{2-x}{x}}$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + 9 - \frac{16}{x^2 + 4}}$

Exercice 11

Etudier la limite à droite et à gauche de a pour chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{x^3}{1-2x}$ $a = \frac{1}{2}$

2. $f(x) = \frac{1}{x-1}$ $a = 1$

3. $f(x) = \frac{4x-5}{1-x}$ $a = 1$

Exercice 12

On considère 3 fonctions f , g et h , définies sur $\mathbb{R}$, telles que pour tout nombre réel x , on a :

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

Si l'on sait que l'on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, alors on peut en déduire :

Réponse A : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Réponse B : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

Réponse C : $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$

Exercice 13

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 - 6x^4 + 3x^2 - 12)$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x + 3)$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x+2}{3x-7}$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^2+2x}{3x^3-7}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{9x+2}{x-3}}$ f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{9x+2}{x-3}}$ g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 - x + \frac{1}{x^2}\right)$ h) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 - x + \frac{1}{x^2}\right)$

Exercice 14

$$f(x) = \sqrt{0,1x^2 + 10} \text{ et } g(x) = e^{1-0,5x}.$$

Exercice 15

$$f(x) = (5-x)^2 \text{ et } g(x) = (-2x+1)^3.$$

Exercice 16

$$f(x) = (e^{2x} - 3)^2 \text{ et } g(x) = \sqrt{e^x + 1}.$$

Exercice 17

$$f(x) = e^{\frac{2}{x^2+1}} \text{ et } g(x) = xe^{3x^2-1}.$$

Exercice 18

Vrai-Faux

Pour chacune des affirmation ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse. Justifier votre réponse.

- 1) Si pour tout $x > 0$, on a $f(x) \leq \frac{2}{x}$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
- 2) Si pour tout $x > 0$, on a $2 + \frac{2}{x} \leq f(x) \leq 2 + \frac{3}{x}$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.
- 3) Si pour tout $x > 0$, on a $1 + \frac{3}{x} \leq f(x) \leq 2 + \frac{3}{x}$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ avec $\ell \in [1; 2]$.
- 4) Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$, $\mathcal{C}_f$ ne coupe pas la droite d'équation $y = a$.

Exercice 19

Vrai ou faux

- a. Si pour tout réel x , $f(x) \geq x^2$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- b. Si pour tout réel x strictement positif, $f(x) \leq \frac{1}{x}$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
- c. Si pour tout réel x strictement positif, $1 \leq f(x) \leq x$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$.

Exercice 20

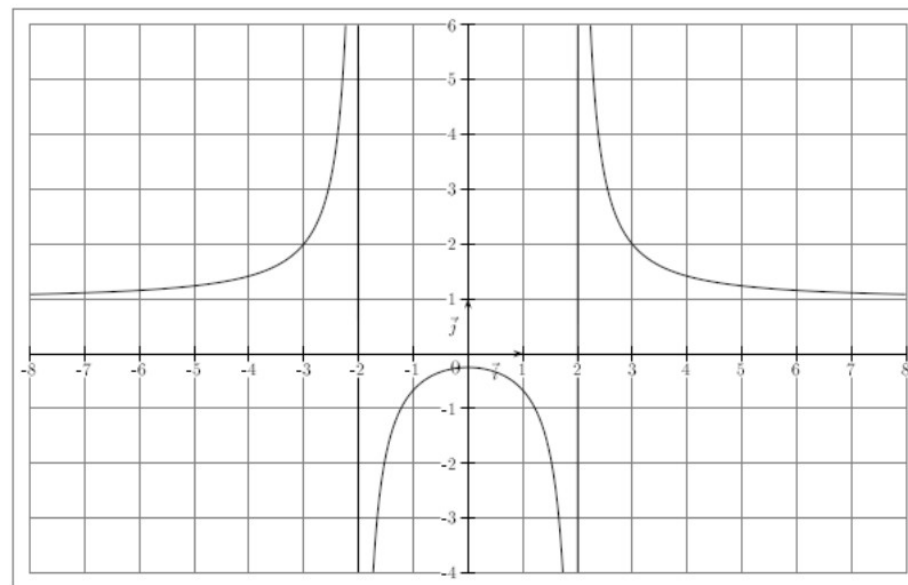
Pour les fonctions suivantes :

- indiquer le domaine de définition
- rechercher les limites aux bornes du domaine de définition
- indiquer l'existence d'asymptotes à la courbe

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = 2x^2 + 3 & \text{b) } g(x) = \frac{5x + 3}{x + 2} & \text{c) } k(x) = \frac{2x^3 - x + 4}{-x^4 + 3x^2 + 1} \\ \text{d) } m(x) = \frac{e^x + e^{2x}}{x^2 + 1} & & \end{array}$$

Exercice 21

On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$.



Déterminer graphiquement les limites de f en $+\infty$, en $-\infty$, en -2 et en 2 à droite et à gauche.
Indiquer les asymptotes éventuelles.

Exercice 22

Soit h une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x , on a $e^{x+1} - 1 \leq h(x) \leq 2e^{x+1} - 1$.

Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$.

Exercice 23

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)(3e^x - 2)$ 2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{2 + e^x}$

Exercice 24

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1+e^x)$ 2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3e^x - 2x + 1)$

Exercice 25

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(2x-3)$ 2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2(x+2)$

Exercice 26

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^x$ 2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{x} + 1\right)(e^x - 3)$

Exercice 27

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2 + 3}$ 2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^x - 1}{e^x + 1}$

Exercice 28

1. $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{2x+3}{x-1}$ 2. $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{2x+3}{x-1}$