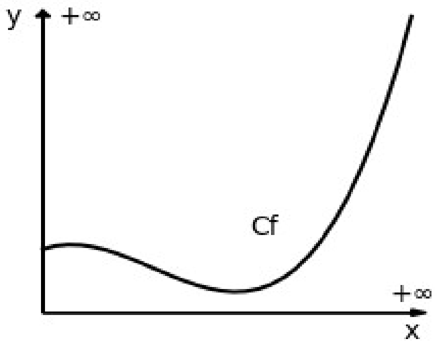
Limites de fonctions, comportement asymptotique – Fiche de cours

1. Limite infinie en l'infini

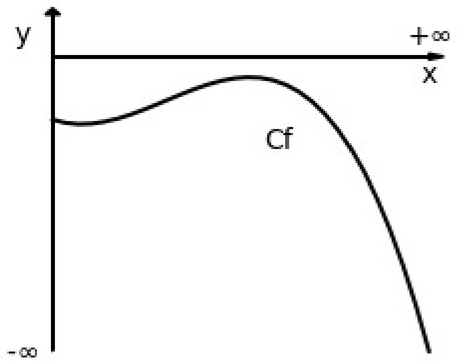
a. Définition

L'infini est un concept qui n'a pas d'équivalent physique ; il s'agit d'une limite

- limite en +∞ :



- limite en -∞ :



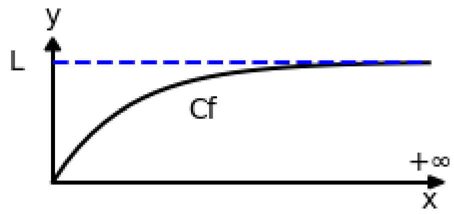
b. Limites de références

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

2. Limite réelle en l'infini

a. Définition



b. Limites de références

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*$

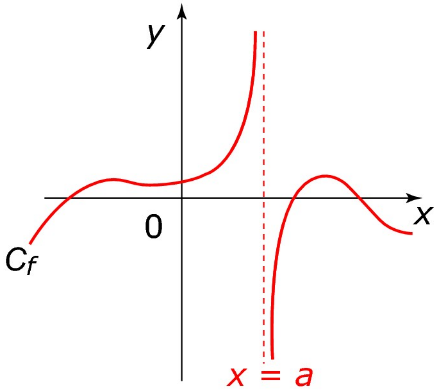
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

c. Asymptote horizontale

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = L \Leftrightarrow$ la droite d'équation $y = L$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $\pm\infty$

3. Limite infinie pour un réel

a. Mise en évidence



b. Limites de références

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$

c. Asymptote verticale

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty \Leftrightarrow$ la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f

5. Opérations sur les limites

a. Somme de deux fonctions

lim f	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
lim g	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
lim $f+g$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

b. Produit de deux fonctions

lim f	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
lim g	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$(\pm\infty)$
lim $f \cdot g$	$l \cdot l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

c. Quotient de deux fonctions

Limite d'un quotient									
Si f a pour limite en a	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	l	0
Si g a pour limite en a	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	$\pm\infty$	0^+_-	0
Si $\frac{f}{g}$ a pour limite en a	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$\pm\infty$	FI

d. Limite d'une fonction rationnelle en l'infini

La limite d'un polynôme en l'infini est égale à la limite de ses monômes de plus haut degré en l'infini

e. Limite d'une composé de deux fonctions

si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{u \to b} f(u) = c$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$

6. Limites et inégalités

a. Comparaison de limites finies

si $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq g(x)$ $\quad \lim\limits_{\substack{x \to a \\ ou\ x \to \pm\infty}} f(x) = L$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ ou\ x \to \pm\infty}} g(x) = L'$

alors $L \leq L'$

b. Théorèmes de comparaison

- comparaison avec -∞ :

si $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq g(x)$ $\quad \lim\limits_{\substack{x \to a \\ ou\ x \to \pm\infty}} g(x) = -\infty$

alors $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ ou\ x \to \pm\infty}} f(x) = -\infty$

- comparaison avec +∞ :

si $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq g(x)$ $\quad \lim\limits_{\substack{x \to a \\ ou\ x \to \pm\infty}} f(x) = +\infty$

alors $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ ou\ x \to \pm\infty}} g(x) = +\infty$

c. Théorème d'encadrement dit « théorème des gendarmes »

si $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ $\quad \lim\limits_{\substack{x \to a \\ ou\ x \to \pm\infty}} g(x) = L$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ ou\ x \to \pm\infty}} h(x) = L$

alors $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ ou\ x \to \pm\infty}} f(x) = L$