Loi uniforme et binomiale – Exercices - Devoirs

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $\{1;2;\ldots;100\}$

1) Calculer $P(X=50)$, $P(25\leqslant X\leqslant 75)$ et $P(X>50)$

2) Déterminer E(X), puis interpréter le résultat.

Exercice 2

Répondre par vrai ou faux

On effectue, dans une urne contenant dix jetons noirs et vingt jetons blancs, deux tirages successifs avec remise du jeton tiré dans l'urne.

1) La probabilité d'obtenir deux jetons noirs est égale à $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$.

2) La probabilité d'obtenir deux jetons blancs est égales à $\frac{2}{3}\times\frac{19}{29}$.

3) La probabilité d'obtenir deux jetons de la même couleur est égale à $\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2$

4) La probabilité d'obtenir deux jetons de couleur différente est égale à $\frac{4}{9}$.

Exercice 3

On considère une urne A contenant trois boules jaunes et sept boules bleues et une urne B contenant quatre boules vertes, deux boules rouges et deux boule jaune . Les boules sont toutes indiscernables au toucher.

On choisit au hasard de manière équiprobable une urne, puis on tire une boule dans cette urne. On s'intéresse à la couleur de la boule tirée.

1) Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

2) Cette expérience est-elle une succession d'épreuves indépendantes ?

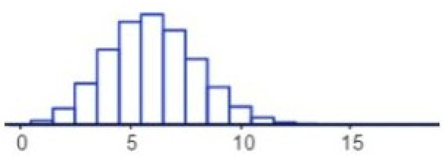
3) Déterminer la probabilité de l'événement J : «Obtenir une boule Jaune »

4) Sachant que l'on a obtenu une boule jaune, quelle est la probabilité que la boule provienne de l'urne A ?

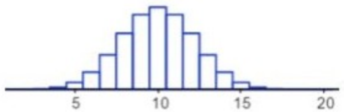
Exercice 4

Associer chaque représentation à la loi binomiale qu'il représente.

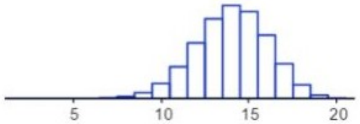
B(20 ; 0,7)



B(20 ; 0,3)



B(20 ; 0,5)



Exercice 5

On donne la loi de probabilité de d'une variable aléatoire X :

x_i	-2	1	2	3	5
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

a) Déterminer la probabilité $P(X \geqslant 0)$.

b) Calculer l'espérance de X.

c) Calculer l'écart type de X.

Exercice 6

Un avion a une capacité de 100 personnes. On considère que la probabilité qu'une personne qui a réservé son billet ne se présente pas à l'embarquement est de 5%.

1. 100 billets, un par place, ont été vendus.
   On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes qui se présentent à l'embarquement.
   a) Préciser pourquoi X suit une loi binomiale, et en donner les paramètres.
   b) Calculer la probabilité que l'avion soit plein.
   c) Calculer la probabilité pour qu'il reste au moins une place libre dans cet avion.
   d) Calculer la probabilité qu'il y ait strictement moins de 96 personnes dans l'avion.
2. Comme on estime que la probabilité que cet avion ne soit pas plein est importante, on décide de vendre 105 billets pour ce vol.
   Calculer la probabilité qu'aucun client ne se retrouve sans place.

Exercice 7

Un graphologue prétend être capable de déterminer le sexe d'une personne d'après son écriture dans 90% des cas.
Personnellement, j'en doute. Pour préciser mon idée, je lui soumet 20 exemples d'écriture.
Je suis prêt à reconnaître sa compétence s'il réussit au moins 90% des identifications du sexe, soit au moins 18 sur les 20.

1. Quelle est la probabilité que je reconnaisse la compétence du graphologue alors qu'il s'est prononcé 20 fois complètement au hasard ?
2. Quelle est la probabilité que je rejette l'affirmation du graphologue alors qu'elle est totalement fondée ?
   Quel inconvénient présente ce test ?

Exercice 8

Quelles sont les valeurs affichées par le programme Python suivant ?

```
u=1
v=1
for i in range(5) :
    w=u+v
    v=u
    u=w
    print(i,w)
print(u/v)
```

Exercice 9

1) Calculer sans calculatrice :

$$\binom{111}{0} \ ; \ \binom{15}{15} \ ; \ \binom{412}{1} \ ; \ \binom{15}{5}-\binom{15}{10} \ ; \ \binom{85}{84} \ ; \ \binom{86}{80}-\binom{85}{80}-\binom{85}{79}$$

2) À l'aide du triangle de Pascal, donner les valeurs des coefficients binomiaux de la forme $\binom{6}{k}$ où k est un entier compris entre 0 et 6.

Exercice 10

Dire lesquelles des expériences 1 et 2 correspondent à des schémas de Bernoulli et lesquelles des variables aléatoires X et Y suivent une loi binomiale.

Expérience 1 :

On lance dix fois un dé à 6 faces, dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Lors d'un lancer, si le numéro qui apparaît est 1 alors c'est un succès, sinon c'est un échec.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès de ces séries de 10 lancers et Y la variable aléatoire telle que si le lanceur a eu plus de 7 succès il gagne 10€ sinon il perd 5€.

Expérience 2 :

On lance une pièce, on note F si face apparaît et P si pile apparaît.

- Si le résultat du lancer est F alors on tire une boule de l'urne 1 contenant une boule rouge et une boule noire

- Si le résultat du lancer est P alors on tire une boule de l'urne 2 contenant une boule blanche et une boule bleue.

Exercice 11

1) Interpréter $\binom{6}{1}$ et en donner la valeur.
2) On suppose connu que $\binom{6}{2} = 15$. En déduire $\binom{7}{2}$.
3) Comment obtenir facilement $\binom{7}{5}$?

Exercice 12

Calculer $\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}$

Exercice 13

Un QCM (questionnaire à choix mutiples) est composé de cinq questions numérotées de 1 à 5.
Pour chacune d'elles, quatre réponses sont proposées, dont une seule est exacte.

Partie A :

Un candidat répond à ce QCM, en cochant, au hasard et de façon indépendante, chacune des 5 questions.
On décide de donner au candidat un point par réponse exacte.
Soit X la variable aléatoire associant aux réponses du candidat la note obtenue sur 5.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et en préciser les paramètres.
2. Quelle est la probabilité qu'un candidat obtienne la note maximale ?
3. Etablir la loi de probabilité de X en complétant le tableau ci-dessous en donnant les valeurs exactes, puis arrondies au millième :

valeurs x_i	0					

4. Quelle est la probabilité qu'un candidat obtienne plus de la moyenne ?
5. Quelle note le candidat peut-il espérer obtenir (c'est-à-dire quelle note moyenne obtiendrait-il s'il remplissait au hasard un très grand nombre de QCM) ?

Exercice 14

On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres 20 et 0,4.

1) Calculer $p(X = 3)$; $p(X = 17)$; $p(X = 10)$.
2) Calculer $p(X \leq 1)$; $p(X \geq 18)$; $p(X \leq 15)$ et $p(X \geq 10)$.

Exercice 15

Un élève se rend à vélo au lycée distant de 3 km de son domicile à une vitesse supposée constante de $15 km.h^{-1}$.
Sur le parcours, il rencontre 6 feux tricolores non synchronisés. Pour chaque feu, la probabilité qu'il soit au vert est $\frac{2}{3}$.
Un feu rouge ou orange lui fait perdre une minute et demie. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de feux verts rencontrés par l'élève sur son parcours et T la variable aléatoire égale au temps en minute mis par l'élève pour aller au lycée.

1) Déterminer la loi de probabilités de X.
2) Exprimer T en fonction de X.
3) Déterminer $E(T)$ et interpréter ce résultat.
4) L'élève part 17 minutes avant le début des cours.
   a. Peut-il espérer être à l'heure ?
   b. Calculer la probabilité qu'il soit en retard.

Exercice 16

Soit k un réel tel que $0 \leq k < 18$. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme discrète sur l'intervalle $[0 ; 18]$.
On suppose que l'espérance de X est égale à 12.
Question : La valeur de k est 9 ?

Exercice 17

Deux équipes effectuent les relevés de débit du cours d'eau sur la station hydrométrique. Sébastien appartient à la première équipe. Un quart des relevés est effectué par l'équipe de Sébastien, le reste par la seconde équipe. On choisit 10 relevés au hasard sur l'ensemble des relevés de la station, ensemble qui est suffisamment grand pour que ce choix puisse être assimilé à 10 tirages avec remise. On s'intéresse au nombre de relevés effectués par l'équipe de Sébastien parmi ces 10 relevés.

1. Quelle loi de probabilité modélise cette situation ? Préciser les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité que 4 relevés exactement soient effectués par l'équipe de Sébastien.
3. Calculer la probabilité qu'au moins 2 relevés soient effectués par l'équipe de Sébastien.

Exercice 18

D'après un sondage sur la fréquence de rejet de produits polluants dans les canalisations, on estime que 72% de la population est respectueuse de son environnement. On interroge 300 personnes choisies au hasard pour savoir si elles jettent régulièrement des produits polluants dans les canalisations, ce qui permet de repérer des personnes respectueuses de leur environnement. On estime que la population est suffisamment grande pour que ce choix de 300 personnes soit assimilable à un tirage avec remise. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes respectueuses de leur environnement dans un échantillon de 300 personnes choisies au hasard.
1. Quelle est la loi suivie par X ? Justifier.
2. Calculer la probabilité que 190 personnes soient respectueuses de leur environnement. Arrondir à 10^{-4} .
3. Calculer la probabilité qu'au moins 220 personnes soient respectueuses de leur environnement. Arrondir à 10^{-4}

Exercice 19

Le montant d'un bon d'achat est de 10 euros. Pour ce jeu, le directeur de l'hypermarché a prévu un budget de 250 euros par tranche de 100 clients y participant. Pour vérifier que son budget est suffisant, il simule 100 fois le jeu d'un client à l'aide d'un logiciel. On appelle X la variable aléatoire qui, à 100 jeux simulés, associe le nombre de bons d'achat gagnés. On admet que X suit une loi binomiale.

1. Préciser les paramètres de X.
2. Calculer la probabilité pour qu'il y ait exactement 30 clients gagnants.
3. Quel est le montant moyen de la somme totale offerte en bons d'achat ? Le budget prévisionnel est-il suffisant ?

Exercice 20

Soit X la variable aléatoire suivant la loi binomiale B(20 ; 0,4).

1. $p(X=7)=20\times 0{,}4^7$
2. $p(X>4)=0{,}98$ arrondie au centième
3. $p(X\leq 4)=0{,}05$ arrondie au centième
4. $p(X\leq 4)=0{,}25$ arrondie au centième

Exercice 21

Lors d'une course cyclosportive, 70 % des participants sont licenciés dans un club, les autres ne sont pas licenciés.
Aucun participant n'abandonne la course.

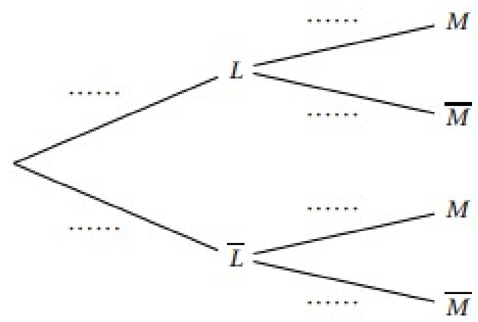
- Parmi les licenciés, 66 % font le parcours en moins de 5 heures ; les autres en plus de 5 heures.
- Parmi les non licenciés, 83 % font le parcours en plus de 5 heures ; les autres en moins de 5 heures.

On interroge au hasard un cycliste ayant participé à cette course et on note :

- L l'évènement « le cycliste est licencié dans un club » et $\overline{L}$ son évènement contraire,
- M l'évènement « le cycliste fait le parcours en moins de 5 heures » et $\overline{M}$ son évènement contraire.

1. À l'aide des données de l'énoncé préciser les valeurs de $P(L)$, $P_L(M)$ et $P_{\overline{L}}\left(\overline{M}\right)$.

2. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant représentant la situation.



3. Calculer la probabilité que le cycliste interrogé soit licencié dans un club et ait réalisé le parcours en moins de 5 heures.

4. Justifier que $P(M)=0{,}513$.

5. Un organisateur affirme qu'au moins 90 % des cyclistes ayant fait le parcours en moins de 5 heures sont licenciés dans un club. A-t-il raison ? Justifier la réponse.

6. Un journaliste interroge indépendamment dix cyclistes au hasard. On note X la variable aléatoire qui donne, parmi les dix cyclistes interrogés, le nombre de cyclistes ayant fait le parcours en moins de cinq heures. On suppose le nombre de cyclistes suffisamment important pour assimiler le choix de dix cyclistes à un tirage aléatoire avec remise.

a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?

b. Calculer la probabilité, arrondie au millième, qu'exactement quatre des dix cyclistes aient réalisé le parcours en moins de cinq heures.

c. Calculer la probabilité, arrondie au millième, qu'au plus trois des dix cyclistes aient réalisé le parcours en moins de cinq heures ?

Exercice 22

Le virus de la grippe atteint chaque année, en période hivernale, une partie de la population d'une ville.
La vaccination contre la grippe est possible ; elle doit être renouvelée chaque année.

Partie A

L'efficacité du vaccin contre la grippe peut être diminuée en fonction des caractéristiques individuelles des personnes vaccinées, ou en raison du vaccin, qui n'est pas toujours totalement adapté aux souches du virus qui circulent. Il est donc possible de contracter la grippe tout en étant vacciné.
Une étude menée dans la population de la ville à l'issue de la période hivernale a permis de constater que :

- 40 % de la population est vaccinée ;
- 8 % des personnes vaccinées ont contracté la grippe ;
- 20 % de la population a contracté la grippe.

On choisit une personne au hasard dans la population de la ville et on considère les évènements :

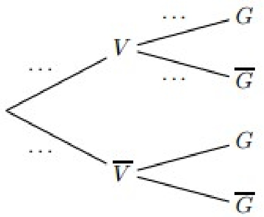
V : « la personne est vaccinée contre la grippe » ;

G : « la personne a contracté la grippe ».

1.

1. a. Donner la probabilité de l'évènement G.

1. b. Reproduire l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés indiqués sur quatre de ses branches.



2. Déterminer la probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée.

3. La personne choisie n'est pas vaccinée. Montrer que la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est égale à $0,28$.

Partie B

Dans cette partie, les probabilités demandées seront données à 10^{-3} près.
Un laboratoire pharmaceutique mène une étude sur la vaccination contre la grippe dans cette ville.
Après la période hivernale, on interroge au hasard n habitants de la ville, en admettant que ce choix se ramène à n tirages successifs indépendants et avec remise. On suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la ville soit vaccinée contre la grippe est égale à $0,4$.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes vaccinées parmi les n interrogées.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?

2. Dans cette question, on suppose que $n = 40$.

2. a. Déterminer la probabilité qu'exactement 15 des 40 personnes interrogées soient vaccinées.

2. b. Déterminer la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée.

2. c. Déterminer la probabilité qu'entre 5 à 10 des personnes interrogées soient vaccinées.

2. d. Déterminer l'espérance de la variable X et interpréter le résultat dans le cadre de l'exercice.

3. Dans cette question, n est un entier naturel non nul.

3. a. Déterminer le nombre minimal de personnes à interroger pour qu'en moyenne, au moins 100 soient vaccinées.

3. b. Exprimer $P(X = 0)$ en fonction de n.

3. c. Déterminer le nombre minimal de personnes à interroger pour que la probabilité de l'évènement « au moins une des n personnes interrogées a été vacciné » soit supérieure à 0,99.

Exercice 23

Tous les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

Une entreprise produit en grande quantité des stylos. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est égale à $0,1$.

1) On prélève dans cette production, successivement et avec remise huit stylos.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de stylos présentant un défaut parmi les huit stylos prélevés.

a) On admet que X suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.

b) Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « il n'y a aucun stylo avec un défaut » ;
B : « il y a au moins un stylo avec un défaut » ;
C : « il y a exactement deux stylos avec un défaut ».

2) En vue d'améliorer la qualité du produit vendu, on décide de mettre en place un contrôle qui accepte tous les stylos sans défaut et 20% des stylos avec défaut.
On prend au hasard un stylo dans la production. On note D l'événement « le stylo présente un défaut », et E l'événement « le stylo est accepté ».

a) Construire un arbre traduisant les données de l'énoncé.

b) Calculer la probabilité qu'un stylo soit accepté au contrôle.

c) Justifier que la probabilité qu'un stylo ait un défaut sachant qu'il a été accepté au contrôle est égale à $0,022$ à 10^{-3} près.

3) Après le contrôle, on prélève, successivement et avec remise, huit stylos parmi les stylos acceptés.
Calculer la probabilité qu'il n'y ait aucun stylo avec un défaut dans ce prélèvement de huit stylos.
Comparer ce résultat avec la probabilité de l'événement A calculée à la question **1)b)**.
Quel commentaire peut-on faire ?