Lois de probabilités discrètes – Fiche de cours

1. Loi uniforme discrète

a. Définition

La variable aléatoire X sur une loi uniforme discrète sur $[\![a;b]\!]$ si :

- X prend toutes les valeurs entières de $[\![a;b]\!]$
- $p(X=a)=P(X=a+1)=\dfrac{1}{a-b+1}$

b. Espérance

Si X est une variable aléatoire uniforme sur $[\![a;b]\!]$ alors :

$$E(X)=\frac{a+b}{2}$$

2. Epreuves et lois de Bernouilli

a. Définition

Une épreuve aléatoire ayant uniquement 2 issues possibles est appelée épreuve de Bernouilli

Si X suite une loi de Bernouilli alors :

- $P(X=0)=1-p$
- $P(X=1)=p$

b. Espérance, écart type

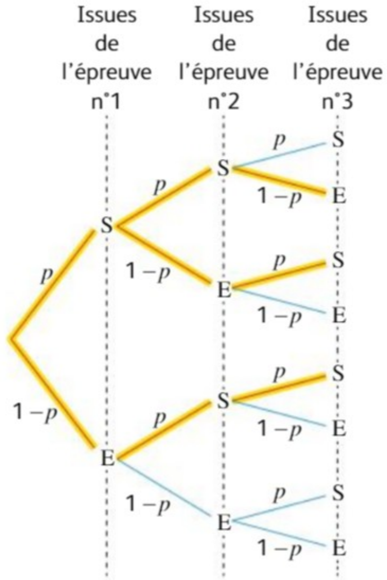
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernouilli

- $E(X)=p$
- $V(X)=p(1-p)$ et $\sigma_X=\sqrt{p(1-p)}$

3. Schéma de Bernouilli

a. Représentation par un arbre

Un schéma de Bernouilli à n épreuves est la répétition d'épreuves de Bernouilli identiques et indépendantes



b. Coefficients binomiaux

On considère un schéma de Bernouilli à n épreuves

Le nombre de manière d'obtenir k succès parmi n tirages, sans tenir compte de l'ordre, s'appelle coefficient binomial

$$\binom{n}{k}=C_n^k$$

c. Triangle de Pascal

- Propriété des coefficients binomiaux

$\forall k \in \mathbb{N} \quad 0 \leq k \leq n$

$\binom{0}{0}=1 \quad ; \quad \binom{n}{0}=1 \quad ; \quad \binom{n}{1}=n \quad ; \quad \binom{n}{n-1}=n \quad ; \quad \binom{n}{n}=1$

$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

- Relation de Pascal

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad 0 \leq k \leq n \quad \binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$

- Triangle de Pascal

n/k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

4. Loi binomiale

a. Loi du nombre de succès

Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de succès dans un schéma de Bernouilli de paramètre p à n épreuves

X suit une loi binomiale $B(n;p)$ avec

$$p(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

b. Espérance, écart type

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $B(n;p)$

- $E(X)=np$
- $V(X)=np(1-p)$ et $\sigma_X=\sqrt{np(1-p)}$

c. Représentation graphique