Primitives et équations différentielles – Exercices - Devoirs

Exercice 1 corrigé disponible

Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction donnée.

1. $x \mapsto -3$
2. $x \mapsto 2x - \frac{1}{3}$
3. $x \mapsto \frac{x^2}{3} - x$
4. $x \mapsto 3x^2 + \frac{2x}{3} - 8$

Exercice 2 corrigé disponible

Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction donnée :

1. $f(x) = e^x - 2e^{-x}$
2. $f(x) = \frac{2x}{x^2+3}$
3. $f(x) = \frac{x}{2(x^2+1)}$
4. $f(x) = (9x^2-3)e^{x^3-x}$
5. $f(x) = (4-x)\cdot(x^2-8x)$

Exercice 3 corrigé disponible

Dans chaque cas, déterminer les solutions de l'équation différentielle donnée.

1. $y' - \frac{1}{2}y = 0$
2. $2y' - 3y = 8y + 4y'$
3. $5y' + 3y = 0$
4. $-\frac{3}{2}y' - \sqrt{2}y = 0$

Exercice 4 corrigé disponible

Dans chaque cas, déterminer la solution F de l'équation différentielle donnée qui respecte la condition précisée.

1. $y' + \sqrt{2}y = 0$ avec $F(\sqrt{2}) = 1$.
2. $2y' - 3y = 2y + 3y'$ avec $F(0) = 5$.
3. $\frac{1}{2}y' + y = \frac{1}{2}y - y'$ avec $F(3) = \frac{1}{e}$.

Exercice 5

Déterminer la primitive des fonctions suivantes :

1. $y' = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $I =]0\,;+\infty[$; $x_0 = 2$; $y_0 = -\sqrt{2}$
2. $y' = 3e^x$; $I = \mathbb{R}$; $x_0 = 1$; $y_0 = e$

Exercice 6

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto -\frac{1}{(x+2)^2}$; $I =]-\infty\,;-2[$
2. $f : x \mapsto \frac{2}{(x+3)^2}$; $I =]-3\,;+\infty[$

Exercice 7

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f(x) = -xe^{x^2-1}$
2. $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$

Exercice 8

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f(x) = -\dfrac{1}{(x+2)^2}$
2. $f(x) = \dfrac{2}{x+3}$

Exercice 9

Déterminer la primitives des fonctions suivantes :

1. $y' = e^{2x} + 2e^{\frac{-x}{2}}$; $f(0) = \dfrac{1}{2}$
2. $y' = 2x(x^2+1)$; $f(0) = \dfrac{3}{4}$

Exercice 10

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $2y' + 3y = 0$ et $y(2) = 1$. **2.** $5y' - 2y = 0$ et $y(5) = \mathrm{e}$.

Exercice 11

Résoudre les équations différentielles proposées avec la condition initiale proposée :

1) $y = -5y'$ avec $f(-2) = 1$
2) $y + 2y' = 0$ avec $f'(-2) = \dfrac{1}{2}$

Exercice 12

f et F sont deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et k est un réel.

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant.

1. Si F est positive et dérivable sur I avec $\mathrm{F}' = f$, alors f est croissante sur I.

2. Si F est décroissante et dérivable sur I avec $\mathrm{F}' = f$, alors f est négative sur I.

3. Si $\mathrm{F}' = f$, alors f est une primitive de F sur I.

4. Si $\mathrm{F}' = f$, alors F est une primitive de f sur I.

5. Si F est une primitive de f sur I, alors $\mathrm{F} + k$ est une primitive de f sur I.

Exercice 13

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $\sqrt{3}y' + y = 0$ et $y(\sqrt{3}) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^3}$.

2. $y' - \pi^2 y = 0$ et $y\left(\dfrac{1}{\pi}\right) = \pi$.

3. Résoudre l'équation différentielle $2y' = -y + 5$ avec $y(0) = 1$
4. Résoudre l'équation différentielle $y' + 2y = 3$ avec $f(0) = 1$
5. Résoudre l'équation différentielle $y = -7y' + 1$ avec $f(1) = e$

Exercice 14

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y' = 3y$
2) $y' + 2y = 0$
3) $y' = 2y + 1$
4) $y + 3y' = 2$
5) $2y + 3y' - 1 = 0$
6) $2y' = y - 1$

Exercice 15

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

$f(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^1 - 4x + 2$

$f(x) = 2x^5 - 5x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 6x - 1$

$f(x) = (x^2 + \frac{1}{3})(x^3 + x)$

$f(x) = (2x^3 + x - \frac{1}{2})(x^4 + x^2 - x)$

$f(x) = \dfrac{4x^2}{(x^3 + 8)}$

$f(x) = \dfrac{2x + 1}{(x^2 + x - 2)}$

$f(x) = \dfrac{1}{3x - 1}$

$f(x) = 1 - x^2 + 3x^4$

Exercice 16

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$ sur $\mathbb{R}$

2. $f(x) = 1 - x + 2e^x$ sur $\mathbb{R}$

3. $f(x) = 5x - \dfrac{3}{x^2}$ sur $]0 ; +\infty[$

Exercice 17

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ sur $]1 ; +\infty[$

2. $f(x) = (x+1)e^{x^2+2x}$ sur $\mathbb{R}$

3. $f(x) = 2(x - e^{-x})(1 + e^{-x})$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 18

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $f(x) = -\dfrac{3}{\sqrt{x}} + 2e^{2x} - \dfrac{1}{2}$ sur $]0 ; +\infty[$

2. $f(x) = -2e^{-2x+1}$ sur $\mathbb{R}$

3. $f(x) = e^{3x+1}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 19

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{1}{x \cdot Lnx}$
2. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$
3. $f(x) = \dfrac{3e^x + 2}{e^x + 2}$
4. $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x^2}$

Exercice 20

Au début d'une épidémie, on constate que 0,01 % de la population est contaminée. Pour t appartenant à $[0;30]$, on note $f(t)$ le pourcentage de personnes touchées par la maladie après t jours. On a donc $f(0)=0{,}01$. On admet que la fonction f est dérivable et strictement positive sur $[0;30]$, et qu'elle est solution de l'équation différentielle (E) : $y'=0{,}05y(1-y)$.

Soit la fonction g définie sur $[0;30]$ par : $g(t)=\dfrac{1}{f(t)}$. On a alors : $g(0)=\dfrac{1}{f(0)}=100$.

1. Démontrer que g est solution de l'équation différentielle (F) : $y'=-0{,}05y+0{,}05$.

2. Résoudre (F).

3. En déduire l'expression de $g(t)$ en fonction de t.

4. Démontrer que : $f(t)=\dfrac{1}{99e^{-0{,}05t}+1}$.

5. Calculer, à l'entier près, le pourcentage de la population infectée après 30 jours.

Exercice 21

Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué :

- $m(x)=3x^2-7x-\dfrac{1}{x^2}$ sur $]0;+\infty[$
- $n(x)=(x-3)(x+4)$ sur $\mathbb{R}$
- $o(x)=\dfrac{18x-12}{(3x^2-4x+1)^2}$ sur $]1;+\infty[$
- $p(x)=2+3e^{-4x+5}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 22

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par ;

$$f(x)=\frac{1}{x}+2x^2+x\,e^{x^2}$$

1. Déterminer une primitive de la fonction f ;

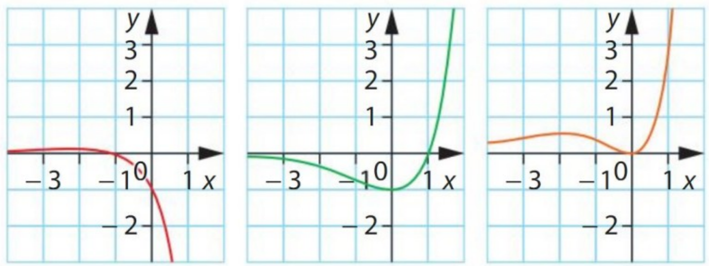
2. puis les primitives de f ;

3. et enfin la primitive de f qui s'annule pour $x=1$.

Exercice 23

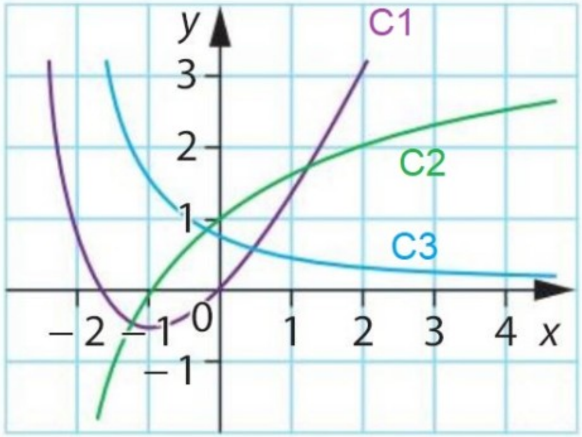
1. On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x)=x\,e^{x}$.

Une de ces trois courbes ci-dessous est la représentation graphique d'une primitive de la fonction f. Laquelle ? Justifier.



Exercice 24

On a tracé la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f sur $\mathbb{R}$, celle de sa dérivée f', et celle d'une de ses primitives F sur $\mathbb{R}$. Identifier ces trois courbes.

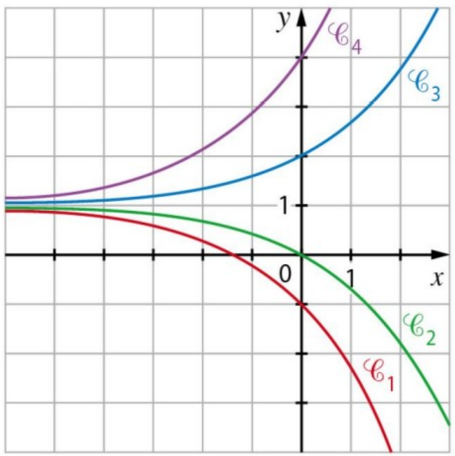


Exercice 25

Déterminer la fonction f, solution sur R de l'équation différentielle
2y ' + 6y = 1, dont la courbe représentative passe par le point A(2 ; 0).

Exercice 26

Les courbes ci-dessous représentent quatre solutions de l'équation différentielle $2y' = y - 1$, pour x réel.



Résoudre cette équation différentielle, puis donner des équations des courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$.

Exercice 27

Dans une boulangerie, les baguettes sortent du four à une température de 225 °C.
On s'intéresse à l'évolution de la température d'une baguette après sa sortie du four.
On admet qu'on peut modéliser cette évolution à l'aide d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
Dans cette modélisation, $f(t)$ représente la température en degré Celsius de la baguette au bout de la durée t, exprimée en heure, après la sortie du four.
Ainsi, $f(0,5)$ représente la température d'une baguette une demi-heure après la sortie du four.
Dans tout l'exercice, la température ambiante de la boulangerie est maintenue à 25 °C.
On admet alors que la fonction f est solution de l'équation différentielle $y' + 6y = 150$.

1. 1. a. Préciser la valeur de $f(0)$.

1. b. Résoudre l'équation différentielle $y' + 6y = 150$.

1. c. En déduire que pour tout réel $t \geqslant 0$, on a $f(t) = 200\,\mathrm{e}^{-6t} + 25$.

2. Par expérience, on observe que la température d'une baguette sortant du four :

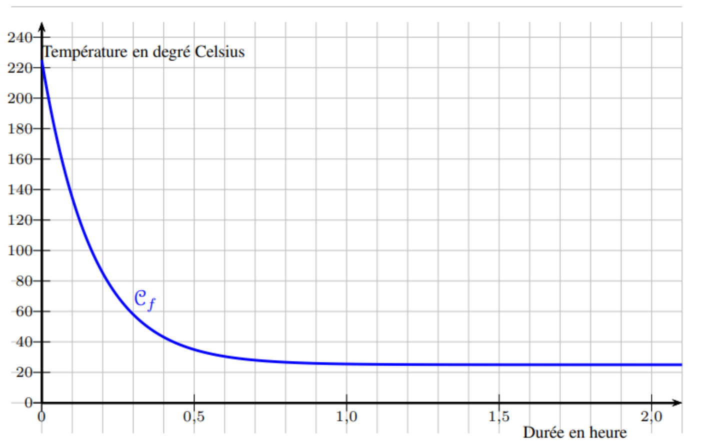
- décroît ;
- tend à se stabiliser à la température ambiante.

La fonction f fournit-elle un modèle en accord avec ces observations ?

3. Montrer que l'équation $f(t) = 40$ admet une unique solution dans $[0\ ;\ +\infty[$.

Pour mettre les baguettes en rayon, le boulanger attend que leur température soit inférieure ou égale à 40 °C. On note $\mathcal{T}_0$ le temps d'attente minimal entre la sortie du four d'une baguette et sa mise en rayon.

On donne en page suivante la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthogonal.



4. Avec la précision permise par le graphique, lire $\mathcal{T}_0$. On donnera une valeur approchée de $\mathcal{T}_0$ sous forme d'un nombre entier de minutes.

Exercice 28

1. Déterminer une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=(x^2+1)e^{x^3+3x}$.

2. a) Déterminer une primitive de la fonction f définie sur $]3;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{7}{(x-1)^2}$.

b) En déduire les solutions de l'équation différentielle $y'=f$ (d'inconnue y).

Exercice 29

Pour chacune des équations différentielles suivantes, déterminer la solution f(x) vérifiant la condition donnée.

1. $y' = 5y$ et $f(0) = 2$.

2. $2y' - 3y = 0$ et $f(4) = 2$.

3. $y' + 6y = 0$ et $f(1) = 1$.

4. $2y' = 5y$ et $f'(0) = 5$.

Exercice 30

Déterminer la primitive de $f(x) = \dfrac{4}{1-3x}$ sur $D =]\dfrac{1}{3};+\infty[$.

Exercice 31

Donner une primitive sur l'intervalle I de chacune des fonctions suivantes :

$f(x) = \dfrac{1}{3}x^5 - \dfrac{15}{2}x^3 + \dfrac{3}{7}x + \dfrac{1}{2} \qquad I = \mathbb{R}$

$h(x) = (2x+1)(x^2+x-7) \qquad I = \mathbb{R}$