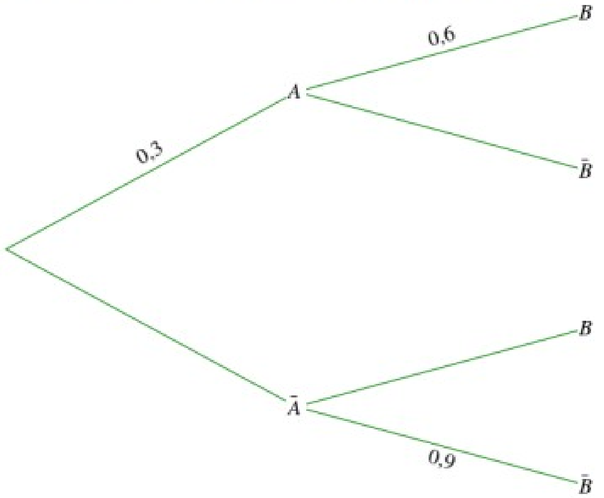
Probabilités conditionnelles – Exercices - Devoirs

Exercice 1

Pour toutes les questions suivantes, on considère l'arbre pondéré suivant :



Énoncé	Réponse
1) Compléter l'arbre ci-dessus.	
2) $p_A(B) =$	
3) $p(A \cap B) =$	
4) $p(B) =$	
5) $p_B(A) =$	

Exercice 2

Dans une classe de 30 élèves, 10 font partie du club photo et 6 sont membres du club théâtre. Enfin, deux élèves sont membres des deux clubs.
On interroge un élève de la classe pris au hasard.
Montrer que les événements C « l'élève fait partie du club photo » et T « l'élève fait partie du club théâtre » sont indépendants.

Exercice 3

Une entreprise fabrique des pièces détachées pour l'industrie automobile. Elle possède deux machines qui fabriquent le même enjoliveur de roue.
La machine A fabrique 75 % des pièces par jour, la machine B, plus petite, n'en fabrique que 25 %. Le taux des pièces défectueuses de la machine A est estimé à 1 %. Celui de la machine B est estimé à 3 %.
Au service du contrôle de qualité, on choisit une pièce au hasard dans la production du jour et on teste sa conformité. Si la pièce est défectueuse, le service veut essayer de déterminer s'il est plus probable qu'elle provienne de la machine A ou de la machine B.

On note :

- A l'événement « La pièce a été fabriquée par la machine A » ;
- B l'événement « La pièce a été fabriquée par la machine B » ;
- D l'événement « La pièce est défectueuse ».

1) Représenter cette situation par un arbre de probabilité.
2) Calculer $p(D)$, $p_D(A)$ et $p_D(B)$.
3) Sachant que la pièce est non conforme, est-il plus probable qu'elle provienne de la machine A ou de la machine B ?

Exercice 4

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives. On admet que :
- la probabilité qu'il gagne la première partie est $0,1$;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,8$;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,6$.

On note, pour tout entier naturel n non nul :
- G_n l'événement « le joueur gagne la n-ième partie » ;
- p_n la probabilité de l'événement G_n.

On a donc $p_1 = 0,1$.

1. Montrer que $p_2 = 0,62$.
2. Le joueur a gagné la deuxième partie.
   Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.
3. Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties.
4. Montrer que pour tout nombre entier naturel n non nul, $p_n = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$.
5. Exprimer p_n en fonction de n $\forall n \in \mathbb{N}^*$
6. En déduire la limite de p_n.

Exercice 5

Indiquer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse et justifier soigneusement la réponse. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

Zoé se rend à son travail à pied ou en voiture. Là où elle habite, il pleut un jour sur quatre.
Lorsqu'il pleut, Zoé se rend en voiture à son travail dans 80 % des cas.
Lorsqu'il ne pleut pas, elle se rend à pied à son travail avec une probabilité égale à 0, 6.

Affirmation : « Zoé utilise la voiture un jour sur deux. »

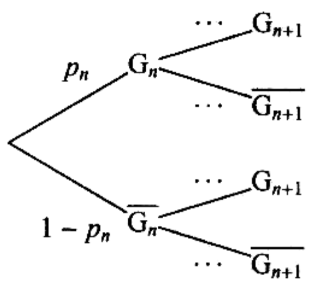
Exercice 6

Un site internet propose un jeu en ligne dont les probabilités sont les suivantes :

- si l'internaute gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante vaut $\frac{2}{5}$.
- si l'internaute perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante vaut $\frac{4}{5}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par G_n l'évènement « l'internaute gagne la n-ième partie » et on note p_n la probabilité de l'évènement G_n.
L'internaute gagne toujours la première partie et donc $p_1 = 1$.

1) Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



2) Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5}$.

3) Pour tout n entier naturel non nul, on pose $u_n = p_n - \frac{1}{4}$.

   a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme u_1 à préciser.

   b) Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$.

   c) Déterminer la limite de p_n.

Exercice 7

Dans un zoo, l'unique activité d'un manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongeoir.
On a observé que si un manchot choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est 0,3.
Si un manchot choisit le plongeoir, la probabilité qu'il le reprenne est 0,8.
Lors du premier passage les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.
Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'évènement :

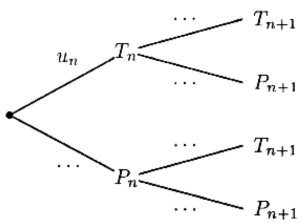
- T_n : « le manchot utilise le toboggan lors de son n-ième passage. »
- P_n : « le manchot utilise le plongeoir lors de son n-ième passage. »

On considère alors la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = p(T_n)$$

où $p(T_n)$ est la probabilité de l'évènement T_n.

1. a) Donner les valeurs des probabilités $p(T_1)$, $p(P_1)$ et des probabilités conditionnelles $p_{T_1}(T_2)$, $p_{P_1}(T_2)$.
   b) Montrer que $p(T_2) = \dfrac{1}{4}$.
   c) Recopier et compléter l'arbre suivant :



   d) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 0{,}1u_n + 0{,}2$.
   e) À l'aide de la calculatrice, émettre une conjecture concernant la limite de la suite (u_n).
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$v_n = u_n - \frac{2}{9}.$$

   a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{10}$. Préciser son premier terme.
   b) Exprimer v_n en fonction de n. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   c) Calculer la limite de la suite (u_n). Ce résultat permet-il de valider la conjecture émise en 1. e. ?

Exercice 8

1. **Restitution organisée de connaissances :**

   Prérequis : On rappelle que deux évènements A et B sont indépendants pour la probabilité p si et seulement si : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

   Soient A et B deux évènements associés à une expérience aléatoire.

   a. Démontrer que $p(B) = p(B \cap A) + p\left(B \cap \overline{A}\right)$.

   b. Démontrer que, si les évènements A et B sont indépendants pour la probabilité p, alors les évènements $\overline{A}$ et B le sont également.

2. **Application :** Chaque matin de classe, Stéphane peut être victime de deux évènements indépendants :
   - R : « il n'entend pas son réveil sonner » ;
   - S : « Son scooter, mal entretenu, tombe en panne ».

   Il a observé que chaque jour de classe, la probabilité de R est égale 0,1 et que celle de S est égale à 0,05. Lorsque qu'au moins l'un des deux évènements se produit, Stéphane est en retard au lycée sinon il est à l'heure.

   a. Calculer la probabilité qu'un jour de classe donné, Stéphane entende son réveil sonner et que son scooter tombe en panne.

   b. Calculer la probabilité que Stéphane soit à l'heure au lycée un jour de classe donné.

   c. Au cours d'une semaine, Stéphane se rend cinq fois au lycée. On admet que le fait qu'il entende son réveil sonner un jour de classe donné n'influe pas sur le fait qu'il l'entende ou non les jours suivants.
   Quelle est la probabilité que Stéphane entende le réveil au moins quatre fois au cours d'une semaine ? Arrondir le résultat à la quatrième décimale.

Exercice 9

Un ostréiculteur élève deux espèces d'huîtres : « *la plate* » et « *la japonaise* ». Chaque année, les huîtres plates représentent 15 % de sa production.
Les huîtres sont dites de calibre n° 3 lorsque leur masse est comprise entre 66 g et 85 g.
Seulement 10 % des huîtres plates sont de calibre n° 3, alors que 80 % des huîtres japonaises le sont.

1) Le service sanitaire prélève une huître au hasard dans la production de l'ostréiculteur. On suppose que toutes les huîtres ont la même chance d'être choisies.
   On considère les événements suivants :
   - J : « *l'huître prélevée est une huître japonaise* »,
   - C : « *l'huître prélevée est de calibre n° 3* ».

   a) Construire un arbre pondéré complet traduisant la situation.
   b) Calculer la probabilité que l'huître prélevée soit une huître plate de calibre n° 3.
   c) Justifier que la probabilité d'obtenir une huître de calibre n° 3 est $0,695$.
   d) Le service sanitaire a prélevé une huître de calibre n° 3. Quelle est la probabilité que ce soit une huître plate ?

Exercice 10

Une entreprise fabrique un article qui doit répondre à des normes précises. On considère que 8 % des articles produits ne sont pas conformes aux normes. Un test de contrôle en fin de fabrication est censé repérer les articles non conformes. Cependant le test comporte une certaine marge d'erreur ; une étude a établi que :

- 5 % des articles conformes aux normes sont refusés par le test ;
- 10 % des articles non conformes aux normes sont acceptés par le test.

On considère un article pris au hasard au moment de passer le test. On note :
C l'événement « l'article est conforme aux normes » ;
T l'événement « l'article est accepté par le test ».
$\overline{C}$ et $\overline{T}$ désignent les événements contraires respectifs de C et T.
La partie 4 est indépendante des questions précédentes.

1. Compléter le tableau à double entrée ci-dessous (on donnera les résultats en pourcentages) :

	C	$\overline{C}$	Total
T			
$\overline{T}$			
Total			100

2. Que signifie l'événement $C \cap T$? Calculer sa probabilité.
3. Calculer la probabilité $p(T)$ que la pièce soit acceptée par le test.

Exercice 11

Les deux parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4}.
Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus.

Partie A

On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :
- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de $0,99$ (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de $0,97$ (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.
On note V l'évènement « la personne est contaminée par le virus » et T l'évènement « le test est positif ».
$\overline{\text{V}}$ et $\overline{\text{T}}$ désignent respectivement les évènements contraires de V et T.

1) a) Préciser les valeurs des probabilités $P(\text{V})$, $P_{\text{V}}(\text{T})$, $P_{\overline{\text{V}}}(\overline{\text{T}})$.
   Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
   b) En déduire la probabilité de l'évènement $\text{V} \cap \text{T}$.
2) Démontrer que la probabilité que le test soit positif est 0,049 2.
3) a) Justifier par un calcul la phrase :
   « Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée ».
   b) Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif. Que peut-on en conclure.

Exercice 12

Dans cet exercice, on arrondira les résultats au millième

Une agence Pôle Emploi étudie l'ensemble des demandeurs d'emploi selon deux critères, le sexe et l'expérience professionnelle.

Cette étude montre que :

- 52 % des demandeurs d'emploi sont des femmes et 48 % sont des hommes ;
- 18 % des demandeurs d'emploi sont sans expérience et les autres sont avec expérience ;
- parmi les hommes qui sont demandeurs d'emploi, on sait que 17,5 % sont sans expérience.

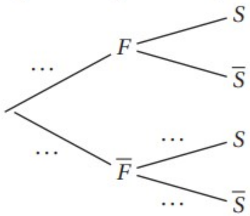
Partie A

On prélève au hasard la fiche d'un demandeur d'emploi de cette agence. On note :

- S : l'évènement « le demandeur d'emploi est sans expérience » ;
- F : l'évènement « le demandeur d'emploi est une femme ».

1. Préciser $p(S)$ et $p_{\overline{F}}(S)$.

2. Recopier l'arbre ci-dessous et compléter les pointillés par les probabilités associées.



3. Démontrer que $p\left(\overline{F} \cap S\right) = 0{,}084$. Interpréter le résultat.

4. La fiche prélevée est celle d'un demandeur d'emploi sans expérience. Calculer la probabilité pour que ce soit un homme.

5. **a.** Justifier que $p(S \cap F) = 0{,}096$.

b. Sachant que la fiche prélevée est celle d'une femme, calculer la probabilité que ce soit la fiche d'un demandeur d'emploi sans expérience.