Les suites numériques – Exercices - Devoirs

Exercice 1 corrigé disponible

Soit (w_n) la suite géométrique de premier terme $w_0 = 60$ et de raison 0,88.

1) Exprimer w_{n+1} en fonction de w_n, puis w_n en fonction de n.

2) Soit $S = w_0 + w_1 + w_2 + \ldots + w_n$.

a) Déterminer S en fonction de n.

b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S$.

Exercice 2 corrigé disponible

1. Déterminer les limites des suites (u_n) suivantes :

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 - 3n + 5$ b. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2-3}{n^2+1}$

2. Soit (u_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{3(-1)^n}{n^2}$

a. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$ $-\dfrac{3}{n} \leq u_n \leq \dfrac{3}{n}$

b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 3 corrigé disponible

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = -4$ et $u_{n+1} = -\dfrac{5}{3}u_n + 3$.

En suivant le plan de travail présenté dans le cours, déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 4 corrigé disponible

Au 1er janvier 2020, un arboriculteur possède 5 000 pommiers. Chaque année :

- il arrache 4 % des pommiers car ils sont endommagés;
- il replante 300 nouveaux pommiers.

On modélise la situation par une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n représente le nombre de pommiers possédés par l'arboriculteur au 1er janvier de l'année $(2020+n)$.

On obtient ainsi une suite (u_n) telle que : $u_0 = 5000$ et $u_{n+1} = 0{,}96u_n + 300$, pour tout entier naturel n.

1) Calculer u_1 et u_2.

Combien de pommiers possèdera l'arboriculteur au 1er janvier 2022 ?

2) On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 7500$, pour tout entier naturel n.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0.

b) Pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

c) En déduire que, pour tout entier naturel n : $u_n = 7500 - 2500 \times (0{,}96)^n$.

3) La superficie des terrains de l'arboriculteur lui permet d'avoir au maximum 6 000 pommiers. L'arboriculteur voudrait savoir en quelle année il devra acquérir un autre terrain pour pouvoir planter de nouveaux pommiers.
On considère le programme en Python ci-dessous

```
def pommiers() :
    n=0
    u=5000
    while ........:
           n=n+1
           u=........

    return n
```

a) Recopier et compléter ce programme afin qu'il réponde à la problématique énoncée ci-dessus.

b) Quelle est la valeur de la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

4) Si l'évolution se poursuit toujours selon ce modèle, vers quelle valeur va tendre à terme le nombre de pommiers de cet arboriculteur ? Justifier la réponse.

Exercice 5

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 300$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}75u_n + 200$.

1. Utiliser les droites d'équations $y = x$ et $y = 0{,}75x + 200$ pour construire les quatre premiers termes de la suite (u_n). Que peut-on conjecturer à propos de la limite de la suite (u_n) ?
2. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 800$.
   a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b. Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.
   En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 800 - 500 \times 0{,}75^n$.
   c. La suite (u_n) est-elle convergente ?
3. Une salle de spectacle propose un abonnement pour l'année. En 2010, il y avait 300 abonnés.
   On estime que chaque année, il y a 200 nouveaux abonnés et que d'une année sur l'autre, 75 % des abonnés renouvellent leur abonnement.
   On note u_n le nombre d'abonnés pour l'année 2010+n. On a donc $u_0 = 300$ et $u_{n+1} = 0{,}75u_n + 200$.
   a. Dans combien d'années, le nombre d'abonnés sera-t-il supérieur à 790 ? (utiliser un algorithme)
   b. Dans ces conditions, est-il possible pour le gérant de la salle de spectacle d'espérer 1000 abonnés ?

Exercice 6

Déterminer les limites des suites (u_n) suivantes :

a) $u_n = \dfrac{4n^2 + 3n - 1}{2n + 1} - 2n + 3$ b) $u_n = \dfrac{n^2 + 5n + 7}{2 - n}$

c) $u_n = 2 - n + (-1)^n$ d) $u_n = 3 \times \dfrac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}}$

Exercice 7

Déterminer les limites des suites (u_n) suivantes

a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2n + 1}{3n + 5}$ c) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = -1 + \dfrac{\cos n}{n}$

b) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n - \sqrt{n} + 3$ d) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{4^n - 3^n}{4^n + 2^n}$

Exercice 8

Déterminer les limites des suites (u_n) et (v_n), où $u_n = \dfrac{2n+1}{4n(n+1)}$ et $v_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2 + n\sqrt{n} + 1}$.

Exercice 9

Déterminer dans chacun des cas suivants la limite de la suite (u_n) :

a) $u_n = n^3 + \dfrac{1}{n}$ b) $u_n = (3n+1)(-7n+5)$ c) $u_n = \dfrac{3 - \frac{4}{n}}{\frac{2}{n^2}}$ d) $u_n = n^3 - n^2 + 3n - 1$

e) $u_n = \dfrac{2n^2+1}{-n^2+6}$ f) $u_n = \dfrac{n^2+3n-5}{n^3-6n^2+1}$ g) $u_n = n\sqrt{n} - n$ h) $u_n = (-2n+3)\dfrac{n+3}{-n^2+n+6}$

i) $u_n = \dfrac{n}{n+\sqrt{n}}$ j) $u_n = \dfrac{9-n^2}{(n+1)(2n+1)}$ k) $u_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{n}{(2n+1)^2}$ l) $u_n = \dfrac{2}{3n} - \dfrac{2n^2+3}{3n^2+n+1}$

Exercice 10

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + \frac{5}{2} \end{cases}$$

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite (u_n).
2. a. Dans un repère orthonormal (unité graphique 1cm), tracer, sur l'intervalle [0,10], la courbe (Γ) représentative de la fonction $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$, ainsi que la droite d d'équation y=x.

   b. Construire graphiquement les cinq premiers termes de la suite (u_n).

   c. Conjecturer graphiquement le comportement de la suite (u_n) (limite et sens de variation).
3. Reprendre le raisonnement de la question dans le cas où $u_0=8$

Exercice 11

Au 31 décembre 2017, un magazine possède 450 000 abonnés. On note que chaque année, seuls 80 % des abonnés de l'année précédente renouvellent leur abonnement auxquels viennent s'ajouter 180 000 nouveaux abonnés.

On note (u_n) une suite modélisant le nombre d'abonnés, exprimé en millier, au 31 décembre de l'année $(2017+n)$. On a donc $u_0 = 450$.

1. Calculer, selon ce modèle, le nombre d'abonnés au 31 décembre 2018.

2. Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 180$.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 900$.

   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,8. Préciser son premier terme.

   b. Soit n un entier naturel. Exprimer v_n en fonction de n.

   c. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = -450 \times 0{,}8^n + 900$.

4. La direction du magazine affirme qu'à long terme, le nombre d'abonnés dépassera 900 000. Que penser de cette affirmation ? Justifier la réponse.

5. En s'appuyant sur ce modèle, au 31 décembre de quelle année le nombre d'abonnés dépassera-t-il 800 000 pour la première fois ?

6. La direction du magazine s'engage à verser chaque année 1 euro par abonnement à une association caritative.

On dispose de l'algorithme ci-dessous :

```
U ← 450
S ← 450
Pour I allant de 1 à N
    U ← 0,8 * U + 180
    S ← S + U
Fin Pour
```

On affecte 3 à la variable N et on exécute l'algorithme.

   a. Après l'exécution, quelle valeur numérique contient la variable S ?

   b. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Exercice 12

On s'intéresse à la gestion des déchets ménagers au sein d'une grande agglomération.
Grâce au développement du recyclage, les experts estiment que la quantité de déchets de l'agglomération à incinérer devrait diminuer de 5 % par an. Par ailleurs, suite à la signature d'un contrat, cette agglomération s'engage à partir du 1er janvier 2020 à collecter et incinérer 12 000 tonnes de déchets supplémentaires par an provenant d'une commune voisine.
Durant l'année 2019, l'agglomération a incinéré 300 000 tonnes de déchets.
On admet que la situation peut être modélisée par une suite (u_n) dont le terme général u_n donne, pour tout entier naturel n, une estimation de la quantité (exprimée en millier de tonnes) de déchets incinérés durant l'année $2019+n$. On a ainsi $u_0 = 300$.

1. **a.** Déterminer u_1.

   b. Justifier, pour tout entier naturel n, que $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 12$.

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 240$.

   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95 dont on précisera le premier terme v_0.

   b. Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

   c. En déduire, pour tout entier naturel n, que $u_n = 60 \times 0{,}95^n + 240$.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 13

En France, la pratique de l'escalade est en plein essor ces dernières années, notamment grâce aux nombreuses ouvertures de salles dans les villes. La Fédération Française de la Montagne et de l'Escalade (FFME) comptait 90 000 adhérents au début de l'année 2017.

On estime qu'au début de chaque année :

- 21 % des adhérents ne renouvellent pas leur adhésion ;
- 29 400 nouveaux pratiquants s'inscrivent.

À partir de ces données, on modélise le nombre d'adhérents n années après le début de l'année 2017 par une suite (u_n). Ainsi $u_0 = 90000$.

1. Calculer le nombre d'adhérents au début de l'année 2018 puis au début de l'année 2019.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,79u_n + 29400$.
3. On souhaite déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 135000$.
   On considère l'algorithme suivant :

```
N ← 0
U ← 90000
Tant que ...
    N ← N+1
    U ← ...
Fin Tant que
```

   a. Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il permette de répondre à la question posée.
   b. Quelle est la valeur de N après l'exécution de l'algorithme ?
   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. Exprimer (u_n) en fonction de n ; la FFME peut-elle espérer dépasser 140 000 habitants ?

Exercice 14

Une étude statistique sur le marché du jeu en ligne a été effectuée pour les années 2017 et 2018.

Année	2017	2018
Chiffre d'affaires annuel mondial du marché du jeu en ligne en millions de dollars	45	66

Source : Statista

1. Calculer le pourcentage d'évolution, arrondi à l'unité, du chiffre d'affaires entre 2017 et 2018.

Durant l'année 2019, l'arrivée de nouveaux acteurs sur le marché laisse prévoir une extension accélérée du jeu en ligne.
On modélise alors le chiffre d'affa1res du marché du jeu en ligne par la suite (c_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$c_{n+1} = 1,28c_n + 250,6$$

où le terme c_n représente une estimation du chiffre d'affaires en million de dollars pour l'année $2018 + n$.
Le chiffre d'affaires pour l'année 2018 est donné par $c_0 = 66$.

2. Avec cette modélisation, calculer en million de dollars arrondi au dixième, le chiffre d'affaires prévu pour le marché du jeu en ligne pour l'année 2020.
3. On définit la suite (v_n) en posant pour tout entier naturel n, $v_n = c_n + 895$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
   b. Pour tout entier naturel n, donner l'expression de v_n en fonction de n.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $c_n = 961 \times 1,28^n - 895$.
4. On considère l'algorithme ci-contre :

```
c ← 66
S ← 66
Pour i allant de 1 à n
    c ← 1,28c + 250,6
    S ← S + c
Fin Pour
```

   On choisit $n = 4$.
   a. Recopier puis compléter le tableau ci-dessous. Les valeurs seront arrondies à l'unité.

Valeur de i		1	2	3	4
Valeur de c	66	335			
Valeur de S	66	401			

   b. Après exécution de l'algorithme, quelle est la valeur de S obtenue, arrondie à l'unité, pour $n = 4$?
   c. Donner une interprétation dans le contexte de l'exercice de la valeur de S obtenue à la question précédente.