Les suites numériques – Fiche de cours

1. Généralité des suites

a. Définition

Une suite numérique (u_n) est une fonction (ou un tableau de valeurs) définie par :

$$\mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \to u_n$$

u_n est appelé terme de la suite — n est appelé indice ou rang

b. Suites explicites

La relation fonctionnelle ou explicite d'une suite (u_n) est :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = f(n)$$

c. Suites récurrentes

La relation de récurrence d'ordre 1 d'une suite (u_n) est :

$$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

2. Limites de suite

a. Définition

L'infini est un concept qui n'a pas d'équivalent physique ; il s'agit d'une limite

La limite d'une suite (u_n) est définie par $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

b. Limites de référence

Conséquence Les suites définies pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \frac{1}{n}, \quad v_n = \frac{1}{n^2}, \quad w_n = \frac{1}{n^3}, \quad t_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \text{ont pour limite } 0$$

Conséquence Les suites définies pour tout entier naturel par :

$$u_n = n, \quad v_n = n^2, \quad w_n = n^3, \quad t_n = \sqrt{n}, \quad \text{ont pour limite } +\infty$$

c. Opération de limites

- Limite d'une somme

Si (u_n) a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si (v_n) a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $(u_n + v_n)$ a pour limite	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F. Ind.

- Limite d'un produit

Si (u_n) a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	∞
Si (v_n) a pour limite	ℓ'	∞	∞	∞
alors $(u_n \times v_n)$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	∞*	F. ind.	∞*

- Limite d'un quotient

Si (u_n) a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	ℓ	∞	∞
Si (v_n) a pour limite	$\ell' \neq 0$	0 (1)	0	∞	ℓ'	∞
alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite	$\frac{\ell}{\ell'}$	∞*	F. ind.	0	∞*	F. ind.

d. Théorème de comparaison et d'encadrement

Théorème 2 : Soit trois suites (u_n), (v_n) et (w_n). Si à partir d'un certain rang, on a :

1) **Théorème d'encadrement ou "des gendarmes"**

$v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

2) **Théorème de comparaison**

- $u_n \geqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- $u_n \leqslant w_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

e. Limites des suites géométriques

Soit q un réel ; on a les limites suivantes :

- si $q>1$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=+\infty$
- si $q=1$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=1$
- si $0<q<1$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0$

3. Suites arithmético-géométriques

a. Définition

Une suite arithmético-géométrique est définie par :

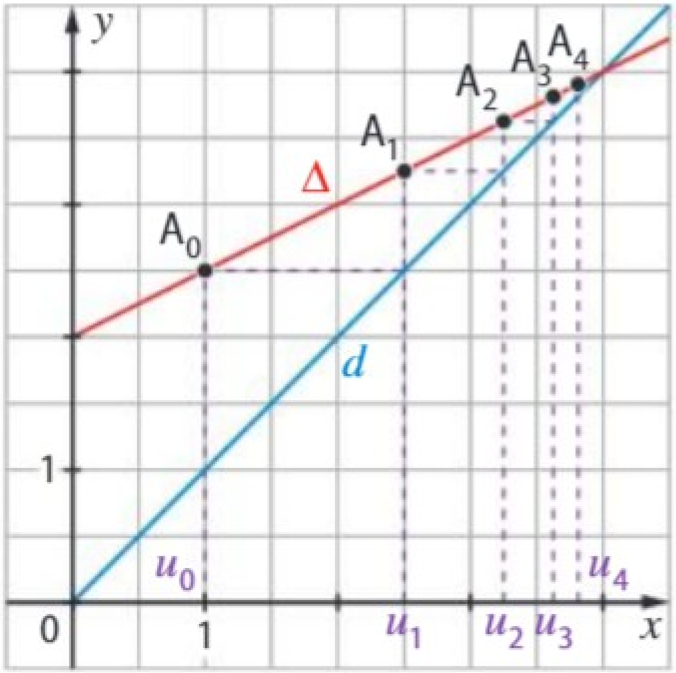
$$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1}=au_n+b \end{cases} \quad \forall a\in\mathbb{R}\, b\in\mathbb{R}$$

b. Représentation graphique

On pose un double changement de variable avec $x=u_n$ et $y=u_{n+1}$

On construit la courbe représentative de f et la droite d'équation y=x

Puis on représente $u_1=f(u_0)$ $u_2=f(u_1)$ $u_3=f(u_2)$ ….



c. Expression du terme général

On étudie la suite définie par $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1}=au_n+b \end{cases} \quad \forall a\in\mathbb{R}\, b\in\mathbb{R}$

On détermine $c=\dfrac{b}{1-a}$ puis on étudie $v_n=u_n-c$

On démontre que (v_n) est géométrique, puis on en déduit l'expression du terme général de (v_n) et de (u_n)