

Matrices et graphes – Exercices – Devoirs

Exercice 1 corrigé disponible

Produit de matrices

On donne les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 20 & 30 \\ 15 & 25 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 45 & 50 \\ 60 & 50 \end{pmatrix}$

Calculer, en détaillant les calculs, le produit AB .

Déterminer le produit BA ; le comparer à AB

Exercice 2 corrigé disponible

Système

On donne le système suivant : $(S) : \begin{cases} 6x + 3y = 1 \\ 4x - 2y = 3 \end{cases}$

- 1) Quelle est la matrice M associée à ce système.
- 2) Pourquoi cette matrice M est-elle inversible ?
- 3) Déterminer l'inverse de la matrice M puis résoudre le système (S) .

Exercice 3 corrigé disponible

Identité remarquable

On donne les deux matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

- 1) Calculer les quantités : $(A + B)^2$ et $A^2 + 2AB + B^2$. (On détaillera les calculs)
- 2) L'égalité : $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ est-elle vérifiée ? Pourquoi ?

Exercice 4 corrigé disponible

Opérations sur les matrices

- 1) Soit la matrice $A = (a_{ij})$ de dimension 2×4 telle que $a_{ij} = 2ij$
Écrire A et A^T où A^T est la matrice transposée de A
- 2) Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}$
Montrer que $M^2 = 3M$ puis en déduire M^3 (on détaillera les calculs)
- 3) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 8 \\ 4 & -3 & -8 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.
 - a) Calculer A^2 . Que peut-on dire de la matrice A ?
 - b) Déterminer alors la matrice X telle que : $AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

Exercice 5 corrigé disponible

Systèmes

- 1) Soit le système : $\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ 7x + 13y = 44 \end{cases}$
 - a) Mettre ce système sous la forme matricielle $AX = B$.
 - b) Résoudre matriciellement ce système.
- 2) a) Donner à l'aide de la calculatrice la matrice inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
 - b) En déduire la résolution du système : $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + y - z = -1 \\ -x + y + z = 5 \end{cases}$ à l'aide de matrices.

Exercice 6 corrigé disponible

On donne les matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie A

1. Calculer la matrice M^2 . On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}$.
2. Vérifier que $M^3 = M^2 + 8M + 6I$.
3. En déduire que M est inversible et que $M^{-1} = \frac{1}{6}(M^2 - M - 8I)$.

Partie B

On cherche à déterminer trois nombres entiers a , b et c tels que la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points A(1 ; 7), B(-1 ; 9) et C(2 ; 3).

1. Démontrer que le problème revient à chercher trois entiers a , b et c tels que

$$M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. Calculer les nombres a , b et c .

Exercice 7

On considère les matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que P est inversible puis calculer P^{-1}
2. Montrer que $M = P \cdot D \cdot P^{-1}$
3. Démontrer que $M^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$
4. Calculer $M^n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 8 corrigé disponible

On se place dans le repère orthonormal du plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$

On considère les points $A(-2; -2)$ $B(4; -2)$ $C(3; 2)$ $D(-1; 2)$
 $E(-3; 0)$ et $\Omega(-5; 2)$

1. On réalise une translation de vecteur $\vec{u}(1; 2)$ du polygone ABCDE
 - a. Réaliser la construction graphique
 - b. Indiquer par un calcul matriciel les coordonnées des images A' , B' , C' , D' , E' de A, B, C, D, E par la translation de vecteur $\vec{u}(1; 2)$
 - c. Vérifier graphiquement la cohérence des résultats
2. On réalise une rotation de centre Ω et d'angle $\pi/2$ du polygone ABCDE
 - a. Réaliser la construction graphique
 - b. Indiquer par un calcul matriciel les coordonnées des images A' , B' , C' , D' , E' de A, B, C, D, E par la rotation de centre Ω et d'angle $\pi/2$
 - c. Vérifier graphiquement la cohérence des résultats
3. On réalise une homothétie de rapport 2 du polygone ABCDE et de centre Ω
 - a. Réaliser la construction graphique
 - b. Indiquer par un calcul matriciel les coordonnées des images A' , B' , C' , D' , E' de A, B, C, D, E par l'homothétie de rapport 2 et de centre Ω
 - c. Vérifier graphiquement la cohérence des résultats

Exercice 9

Soit les matrices $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la matrice P^2 . En déduire que la matrice P est inversible et que $P^{-1} = \frac{1}{3}P$.
2. Montrer que la matrice $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale D que l'on déterminera.
3. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul, $M^n = PD^nP^{-1}$.
4. Calculer la matrice M^n pour n entier naturel non nul.

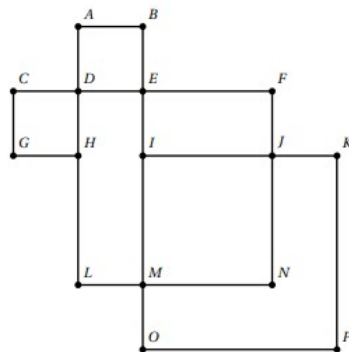
Exercice 10

On pose $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer A en fonction de I et N .
2. Calculer la matrice N^2 et en déduire une expression de A^2 en fonction de I et N .
3. Montrer alors que $A^k = (-3)^k I + k(-3)^{k-1} N$.

Exercise 11

Le responsable d'une agence de services à domicile implantée en ville a représenté par le graphe ci-dessous toutes les rues dans lesquelles se trouvent des clients qu'il doit visiter quotidiennement. Dans ce graphe, les arêtes sont les rues et les sommets sont les intersections des rues.



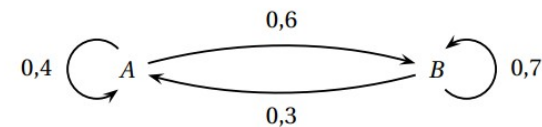
1. (a) Déterminer si le graphe est connexe.
(b) Déterminer si le graphe est complet.

Ce responsable voudrait effectuer un circuit qui passe une et une seule fois par chaque rue dans laquelle se trouvent des clients.

2. Déterminer si ce circuit existe dans les deux cas suivants :
 - (a) Le point d'arrivée est le même que le point de départ.
 - (b) Le point d'arrivée n'est pas le même que le point de départ.

Exercice 12

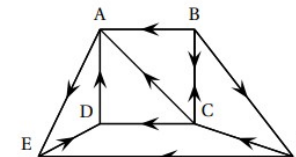
On donne le graphe probabiliste suivant :



Affirmation A : L'état stable associé à ce graphe est $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Exercice 13

Dans le graphe ci-contre, on a indiqué, pour cette même ville, le sens de circulation pour les véhicules sur les différentes avenues.



1. Peut-on trouver un trajet de longueur quelconque qui permet d'aller de D à B en respectant les sens de circulation? Justifier la réponse.
2. Écrire la matrice M associée à ce graphe (on rangera les sommets dans l'ordre alphabétique)
3. (b) Combien y-a-t-il de chemins de longueur 3 partant du carrefour B et arrivant en A?
Écrire tous ces chemins.
- (c) Combien y-a-t-il de chemins de longueur 3 arrivant au point E? Expliquer la démarche.
- 

Exercise 14

On considère la matrice

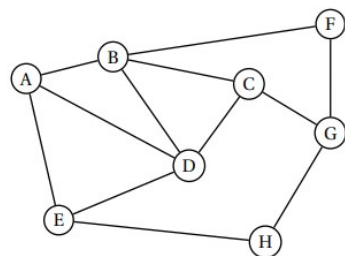
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On suppose que M est la matrice d'adjacence d'un graphe à quatre sommets A, B, C, D dans cet ordre.

Exercice 15

Une compagnie aérienne utilise huit aéroports que l'on nomme A, B, C, D, E, F, G et H. Entre certains de ces aéroports, la compagnie propose des vols dans les deux sens. Cette situation est représentée par le graphe Γ ci-contre, dans lequel :

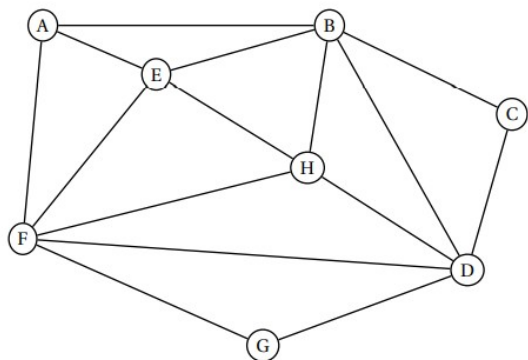
- les sommets représentent les aéroports,
- les arêtes représentent les liaisons assurées dans les deux sens par la compagnie.



- (a) Déterminer, en justifiant, si le graphe Γ est complet.
(b) Déterminer, en justifiant, si le graphe Γ est connexe.
- Déterminer, en justifiant, si le graphe Γ admet une chaîne eulérienne. Si oui, donner une telle chaîne.
- Donner la matrice d'adjacence M du graphe Γ en respectant l'ordre alphabétique des sommets du graphe.
- Un voyageur souhaite aller de l'aéroport B à l'aéroport H.
 - Déterminer le nombre minimal de vols qu'il doit prendre, Justifier les réponses à l'aide des matrices données ci-dessus.
 - Donner tous les trajets possibles empruntant trois vols successifs.

Exercice 16

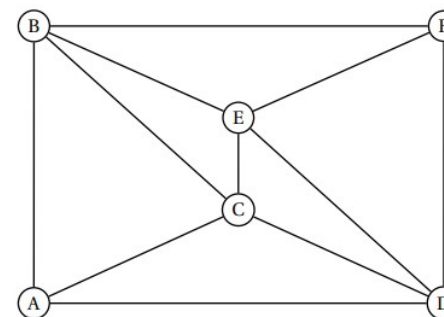
La coopérative LAFRUITIERE collecte le lait de 7 exploitations de montagne. La situation géographique est représentée par le graphe ci-dessous, noté G_L . La coopérative est située au sommet A, les autres sommets B, C, D, E, F, G et H représentent les différentes exploitations ; les arêtes représentent le réseau routier reliant ces exploitations.



- (a) Le graphe G_L est-il complet ? Justifier.
(b) Le graphe G_L est-il connexe ? Justifier.
- Est-il possible d'organiser une tournée de toutes les exploitations en partant de A et en terminant en A et en passant au moins une fois par chaque client, tout en empruntant une fois et une seule chaque route ? Justifier la réponse.
- On appelle M la matrice d'adjacence associée au graphe G_L (les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique). Déterminer, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant A à H. Indiquer ces chemins.

Exercice 17

On considère le graphe G suivant :



- Le graphe G est-il connexe ? Expliquer la réponse.
- Le graphe G admet-il des chaînes eulériennes ? Si oui, en préciser une.
- Justifier la non-existence d'un cycle eulérien pour le graphe G. Quelle arête peut-on alors ajouter à ce graphe pour obtenir un graphe contenant un cycle eulérien ?
- Déterminer un encadrement du nombre chromatique du graphe G. Justifier la réponse.
- Déterminer alors ce nombre chromatique, en explicitant clairement la démarche.
- Déterminer la matrice M associée à ce graphe (les sommets sont pris dans l'ordre alphabétique).

$$7. \text{ On donne } M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 8 & 16 & 6 & 5 \\ 10 & 6 & 11 & 6 & 11 & 10 \\ 8 & 11 & 8 & 11 & 11 & 6 \\ 10 & 6 & 11 & 6 & 11 & 10 \\ 6 & 11 & 11 & 11 & 8 & 8 \\ 5 & 10 & 6 & 10 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Déterminer le nombre de chaînes de longueur 3 partant du sommet A et aboutissant au sommet F. Citer alors toutes ces chaînes.

Exercice 18

A l'issue de sa requête, un internaute peut visiter trois sites A, B, C.

- Le site A contient un lien vers lui-même et deux liens vers B.
- Le site B comporte 5 liens vers lui-même, un vers A et un vers C.
- Le site C comporte un lien vers A, 7 liens vers B et 4 vers C.

Au départ l'internaute choisit au hasard l'un des trois sites. Par la suite la probabilité de passer d'un site (à l'instant n) vers un autre (à l'instant $n + 1$) est proportionnelle au nombre de liens au premier site vers le deuxième.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par a_n , b_n et c_n les probabilités pour que, à l'instant n , l'internaute soit respectivement sur A, B et C.

1. Représenter le modèle par un diagramme de transition.

Exprimer a_{n+1} , respectivement b_{n+1} et c_{n+1} , en fonction des trois réels a_n , b_n et c_n .

2. Ecrire la matrice de transition M .

3. Calculer la distribution stationnaire de la chaîne de Markov (limites des suites (a_n) , (b_n) et (c_n)). En déduire $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} M^n$

4. Le Google PageRank du site A (indice de notoriété) est $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

Dans quel ordre classerez-vous les sites

Exercice 19

Trois chaînes de télévision A, B, C se partagent la diffusion de la coupe du monde de football. D'un match au suivant, elle évolue de la façon suivante :

- 10 % des téléspectateurs de A passent sur B et 10 % sur C;
- 20 % des téléspectateurs de B passent sur A et 10 % sur C;
- 30 % des téléspectateurs de C passent sur A et 10 % sur B.

1) Représenter cette évolution par un graphe.

2) Pourquoi s'agit-il d'un graphe probabiliste ?

3) Déterminez la matrice de d'adjacence M . (Dans l'ordre A, B, C)

Exercice 20

Un opérateur A souhaite prévoir l'évolution de nombre de ses abonnés par rapport à son principal concurrent B à partir de 2013.

En 2013, les opérateurs A et B ont chacun 300 000 abonnés.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n et b_n les nombres d'abonnés, en milliers, des opérateurs A et la n -ième année après 2013. Ainsi, $a_0 = 300$ et $b_0 = 300$.

Des observations conduisent à modéliser la situation par la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = 0,7a_n + 0,2b_n + 60 \\ b_{n+1} = 0,1a_n + 0,6b_n + 70 \end{cases}$$

On pose $M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1) a) Déterminer U_1 .

b) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = MU_n + P$.

2) a) Calculer $(I_2 - M) \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

b) En déduire que la matrice $I - M$ est inversible et préciser son inverse.

c) Déterminer la matrice U telle que $U = MU + P$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $V_n = U_n - U$.

a) Justifier que, pour tout entier naturel n , $V_{n+1} = MV_n$.

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = M^n V_0$.

4) a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \begin{pmatrix} -\frac{100}{3} \times 0,8^n - \frac{140}{3} \times 0,5^n \\ -\frac{50}{3} \times 0,8^n + \frac{140}{3} \times 0,5^n \end{pmatrix}$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer U_n en fonction de n et en déduire la limite de la suite (a_n) .

c) Estimer le nombre d'abonnés de l'opérateur A à long terme.

Exercice 21

- 1) Un élève doit répondre à une série de questions.
À chaque fois, il peut être aidé. S'il est aidé une fois, il recommence la fois d'après avec une probabilité de $1/3$; s'il n'est pas aidé, il continue avec une probabilité de $0,5$.
 - a) Pourquoi peut-on adopter le modèle de Markov ?
S'agit-il d'une chaîne de Markov homogène ? Pourquoi ?
 - b) Donner la liste des états et les probabilités conditionnelles associées.
 - c) Représenter cette situation par un graphe.
- 2) Sarah révise une leçon tous les jours, de manière aléatoire mais sans jamais reprendre une leçon déjà révisée.
Peut-on adopter un modèle de Markov ? Pourquoi ?

Exercice 28

Dans une usine, deux machines A et B peuvent tomber en panne de manière indépendante l'une de l'autre dans la journée avec une probabilité $1/3$. On suppose que si une machine tombe en panne, elle est réparée dans la nuit mais que l'on ne peut réparer qu'une seule machine en une nuit. On note X_n le nombre de machines en panne au matin du n -ième jour.

- 1) a) Justifier que la suite (X_n) forme une chaîne de Markov homogène.
b) Pourquoi peut-on considérer deux états ? Quels sont-ils ?
- 2) a) On appelle P_A et P_B les événements correspondant à « la machine A est en panne » et « la machine B est en panne ». Compléter le tableau de probabilité double entrée suivant :

	P_A	$\overline{P_A}$	Total
P_B			$\frac{1}{3}$
$\overline{P_B}$			
Total			1

- b) En déduire la matrice de transition de cette chaîne de Markov.
- c) Représenter le graphe de cette chaîne de Markov

Exercice 29

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \end{pmatrix}$

- 1) Pourquoi la matrice A est stochastique ?
- 2) On admet que la matrice A est la matrice de transition d'une chaîne de Markov homogène liée aux états $\{1, 2, 3\}$.
 - a) Que signifie le terme « homogène » pour une chaîne de Markov ?
 - b) Représenter le graphe associé à cette chaîne de Markov.
 - c) Donner les probabilités suivantes :
 $p_{X_n=1}(X_{n+1} = 3)$, $p_{X_n=3}(X_{n+1} = 1)$, $p_{X_n=2}(X_{n+1} = 2)$

Exercice 31

Un individu vit dans un milieu où il est susceptible d'attraper une maladie par piqûre d'insectes. Il peut être dans l'un des trois états suivants : ni malade ni immunisé (R), malade (M) ou immunisé (I). D'un mois sur l'autre, son état peut changer selon les règles suivantes :

- étant immunisé, il a une probabilité de $0,8$ de le rester et de $0,2$ de passer à l'état R ,
- étant malade, il a une probabilité de $0,25$ de le rester et de $0,75$ de devenir immunisé,
- enfin, étant dans l'état R , il a une probabilité de $0,75$ de le rester et de $0,25$ de devenir malade.

1. On modélise la dynamique des individus de ce milieu par une chaîne de Markov $(X_t)_{t \geq 0}$ à trois états R , M et I . Ecrire la matrice de transition P de cette chaîne de Markov.
2. Tracer le diagramme en points et flèches associé.
3. Si l'on commence avec une population de 1000 individus comportant 100 individus malades et 900 individus ni malades ni immunisés, combien aura-t-on d'individus malades après une étape, après deux étapes ?
4. Même question si l'on suppose qu'il y a au départ 150 individus malades, 500 individus ni malades ni immunisés et 350 individus immunisés.

Exercice 32

Dans une bourse de valeurs, un titre donné peut augmenter, rester stable, ou baisser. Dans un modèle mathématique, on considère que :

- Le titre est stable à l'instant 0.
- Si à l'instant n , le titre augmente, alors à l'instant $n+1$, soit il augmente, avec une probabilité de $2/3$, soit il baisse ou reste stable, et ceci avec la même probabilité.
- Si à l'instant n , le titre reste stable, alors à l'instant $n+1$, soit il reste stable, avec une probabilité de $2/3$, soit il augmente ou baisse, et ceci avec la même probabilité.
- Si à l'instant n , le titre baisse, alors à l'instant $n+1$, soit il baisse, avec une probabilité de $2/3$, soit il augmente ou reste stable, et ceci avec la même probabilité.

On note 1 l'état correspondant à l'état "le titre augmente", 2 celui correspondant à l'état "le titre reste stable" et 3 celui correspondant à "le titre baisse".

1. Représenter le modèle par un diagramme de transition.
2. Donner la distribution initiale et la matrice de transition M associées la chaîne, puis donner une méthode pour calculer M^n . donner la probabilité d'être à l'instant $n = 10$ à l'état i .
3. L'entier n étant entré par l'utilisateur, écrire un script simulant les $n+1$ premiers états (y compris celui d'origine) de cette chaîne de Markov.
4. Afficher la ligne brisée symbolisant cette "trajectoire" (en abscisse les instants et en ordonnée les états). Simuler les 20 premiers états de la chaîne.
5. En simulant un plus grand nombre d'états (sans nécessairement les faire afficher) dire quel semble être la distribution stationnaire de cette chaîne.

Exercice 33

On étudie l'évolution au cours du temps des formations végétales sur un vaste territoire en les décomposant pour simplifier en trois catégories *lande*, *maquis* et *forêt*. On modélise cette dynamique par une chaîne de Markov X_t d'espace d'états $S = \{l, m, f\}$ et de matrice de transition

$$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,4 \\ 0,65 & 0 & 0,35 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}$$

1. Tracer le diagramme en points et flèches associé.
2. Quelle est, selon ce modèle, la probabilité que la formation végétale passe de l'état *forêt* à l'état *lande* ?
3. Calculer la probabilité de la trajectoire $X_0 = f$, $X_1 = m$, $X_2 = l$, $X_3 = f$.
4. Donner un exemple de trajectoire de longueur 4 et de probabilité nulle.
5. Quelle est, selon ce modèle, la probabilité que la formation végétale passe de l à f en une étape ? en deux étapes ?
6. Connaissant la répartition initiale $\pi_0 = (0,4 \ 0,4 \ 0,2)$, calculer la répartition à l'étape suivante π_1 . Des trois formations végétales, lesquelles progressent, lesquelles régressent ?

Exercice 34

Dans toute la suite, M désigne la matrice $M = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -9 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ et I_3 désigne la

matrice identité d'ordre 3.

1. a. Calculer $M^2 - 3M$ et exprimer cette matrice à l'aide de I_3 .
b. En déduire que la matrice M est inversible et exprimer M^{-1} en fonction de M et de I_3 .
2. a. Démontrer par récurrence qu'il existe deux suites réelles (a_n) et (b_n) telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = a_n M + b_n I_3$. On précisera a_0 et b_0 et on montrera que (a_n) et (b_n) vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = 4a_n \end{cases}.$$

- b. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

Déterminer la matrice A telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

3. a. Soit P la matrice définie par $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1} .

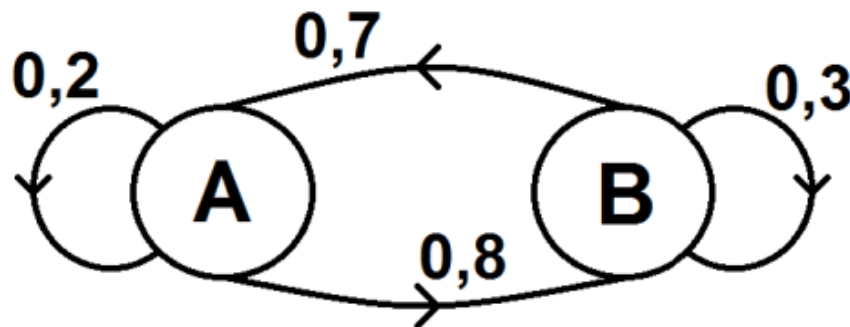
- b. Calculer $P^{-1}AP$. On note D cette matrice.
- c. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
- d. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les expressions de a_n et b_n en fonction de n .
4. a. Déduire des questions précédentes, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de M^n en fonction de n .
b. *Application.* — On considère trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 0$, $w_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = 5u_n + 6v_n - 9w_n \\ v_{n+1} = 2u_n + v_n - 3w_n \\ w_{n+1} = 2u_n + 2v_n - 4w_n \end{cases}.$$

Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les formes explicites de u_n , v_n et w_n en fonction de n .

Exercice 35

On considère la chaîne de Markov suivante :



1) Initialement on est en A.

Quelle est la probabilité d'être en A à la 3ème étape ?

2) Etudier la convergence de la chaîne de Markov.

Exercice 36

Soit (U_n) la suite de matrices de taille 2×1 définie pour tout entier naturel n par :

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } U_{n+1} = A \times U_n + B, \text{ avec } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer $A(I_2 - A)$ et en déduire que la matrice $I_2 - A$ est inversible. Donner $(I_2 - A)^{-1}$.

2) Déterminer la matrice L de taille 2×1 qui vérifie $L = AL + B$.

3) Pour tout entier naturel n , on pose $V_n = U_n - L$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n , $V_{n+1} = A \times V_n$.

b) En déduire une expression de V_n puis de U_n en fonction de A et n .

4) On admet que la suite (A^n) tend vers la matrice nulle d'ordre 2 lorsque n tend vers l'infini, que peut-on en déduire pour la suite (U_n) ?

Exercice 37

Partie A. — Dans toute cette partie, A désigne une matrice carrée d'ordre 2. On dit qu'un réel k est une valeur propre de A s'il existe une matrice colonne non nulle X de taille 2×1 telle que $AX = kX$. On dit alors que la matrice X est associée à la valeur propre k .

1. *Un exemple.* — Dans cette question uniquement, on suppose que $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Calculer AX en prenant $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et en déduire une valeur propre de A .

On suppose à nouveau, dans la suite, que A est une matrice carrée d'ordre 2 quelconque.

2. Démontrer que si k est une valeur propre non nulle de A et si X est une matrice associée à k alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n X = k^n X$.

3. Démontrer qu'un réel k est une valeur propre de A si et seulement si la matrice $A - kI_2$ n'est pas inversible. (On pourra utiliser le théorème 55 du cours.)

4. a. On note dans cette question $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où a, b, c et d sont quatre réels quelconques.

Déduire de la question précédente qu'un réel k est une valeur propre de A si et seulement si k est solution de l'équation $x^2 - (a + d)x + ad - bc = 0$ d'inconnue x .

b. *Application.* — Déterminer les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

c. Existe-t-il des matrices carrées d'ordre 2 qui n'admettent pas de valeurs propres ?

Partie B. — Le but de cette partie est de démontrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$ i.e. de prouver qu'il n'existe pas d'entiers $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe deux entiers $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ i.e. $p = q\sqrt{2}$.

Dans toute la suite, on considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = p$, $v_0 = q$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n \end{cases}.$$

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{Z}$ et $v_n \in \mathbb{Z}$.

2. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$ où A est la matrice définie en question 4.b. de la **partie A**. Il s'ensuit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$. (On ne demande pas de démontrer tout ceci).

a. Démontrer que X_0 est une matrice associée à une des valeurs propres de A que l'on précisera.

- b. En utilisant la question 2. de la **partie A**, en déduire, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de n .
- c. Justifier qu'il existe un certain rang N tel que $-1 < u_N < 1$ et en déduire que $p = 0$.
3. Conclure.

Exercice 38

Des souris sont dans une cage comportant deux compartiments A et B. La porte entre ces compartiments est ouverte dix minutes tous les jours. Chaque jour 20 % des souris du compartiment A passent dans le compartiment B et 10 % des souris qui étaient dans le compartiment B passent dans le compartiment A. Pour tout entier naturel n , on note a_n et b_n les proportions de souris présentes respectivement dans les compartiments A et B après n

jours et on convient que $a_0 = b_0 = 0,5$ et on note U_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

- 1) Exprimer pour tout entier naturel n , a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .
- 2) Déterminer la matrice A telle que pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = A \times U_n$.
- 3) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $U_n = A^n \times U_0$.

4) On admet que pour tout entier naturel n , $A^n = \begin{pmatrix} \frac{1+2 \times 0,7^n}{3} & \frac{1-0,7^n}{3} \\ \frac{2-2 \times 0,7^n}{3} & \frac{2+0,7^n}{3} \end{pmatrix}$.

Que peut-on dire de la répartition à long terme des souris dans les compartiments A et B ?

Exercice 39

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$, pour tout entier supérieur ou égal à 0.

Pour tout entier naturel n , on note C_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

- 1) Donner C_0 et C_1 .

2) Déterminer la matrice A telle que pour tout entier naturel n , on ait : $C_{n+1} = A \times C_n$.

3) Donner sans justifier pour tout entier naturel n , C_n en fonction de A , C_0 et n .

4) On admet que pour tout entier naturel n , on a : $A^n = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & -2^n + 1 \\ 2^{n+1} - 2 & -2^n + 2 \end{pmatrix}$.

En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de u_n en fonction de n , puis donner la limite de la suite (u_n) .