Nombres complexes – Fiche de cours

1. L'idée des nombres complexes

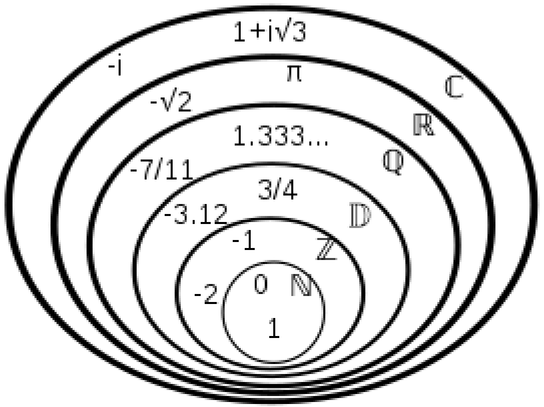
Résoudre des équations polynomiales de degré n ≥1

Exemple : obtenir 3 solutions pour l'équation $x^3+x+1=0$

2. Ensemble des nombres complexes

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ tel que :

- $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ (avec perte de la comparaison)
- $i\in\mathbb{C}$ tel que $i^2=-1$



3. Nombre complexe

a. Définition

Un nombre complexe est défini par :

$z=x+iy$ s'appelle la forme algébrique du nombre complexe

x : partie réelle notée $\mathrm{Re}(z)$

y : partie imaginaire notée $\mathrm{Im}(z)$

b. Egalité de nombres complexes

4. Opérations sur les nombres complexes

On considère les nombres complexes :

$$z=x+iy \quad \text{et} \quad z'=x'+iy'$$

a. La somme

La somme complexe de z et z' est définie de $\mathbb{C}\times\mathbb{C}\rightarrow\mathbb{C}$ par :

$$z+z'=x+x'+i(y+y')$$

b. Le produit

Le produit complexe de z et z' est défini de $\mathbb{C}\times\mathbb{C}\rightarrow\mathbb{C}$ par :

$$z\cdot z'=xx'-yy'+i\cdot(x'y+xy')$$

c. Inverse d'un nombre complexe

L'inverse d'un nombre complexe z est défini de $\mathbb{C}^*\rightarrow\mathbb{C}^*$ par :

$$\frac{1}{z}$$

d. Conjugué d'un nombre complexe

Le conjugué d'un nombre complexe z est défini de $\mathbb{C}\rightarrow\mathbb{C}$ par :

$$\overline{z}=x-iy$$

Propriétés pour $z\in\mathbb{C}, z'\in\mathbb{C}, n\in\mathbb{N}$:

- $\overline{\overline{z}}=z$
- $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$
- $\overline{z^n}=\overline{z}^n$
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ **avec** $z'\neq0$
- $z\cdot\overline{z}=x^2+y^2$
- $\overline{z\cdot z'}=\overline{z}\cdot\overline{z'}$
- $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}=\frac{1}{\overline{z'}}$ avec $z'\neq0$

e. Formule du binôme

Soient 2 nombres complexes a et b alors pour tout n entier naturel :

$z_1 \in \mathbb{C}\ z_2 \in \mathbb{C} \quad z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) \\ \mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2) \end{cases}$

5. Equations du second degré

$\forall a \in \mathbb{R}^* \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad \forall c \in \mathbb{R}$ on définit $(E)\ az^2 + bz + c = 0$

Considérons $\Delta = b^2 - 4ac$

- si $\Delta > 0$ l'équation (E) admet 2 racines réelles :

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta = 0$ l'équation (E) admet une racine double réelle :

$$z_0 = \frac{-b}{2a}$$

- si $\Delta < 0$ l'équation (E) admet 2 racines complexes et conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \underline{\textbf{et}} \quad z_2 = \bar{z}_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

6. Equations polynomiales

Soit le polynôme $P(z) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k \cdot z^k$

- on appelle équation polynomiale de degré n $P(z) = 0$
- un polynôme de degré *n* admet au plus *n* racines complexes
- $P(a) = 0 \Leftrightarrow P(z) = (z-a) \cdot Q(z) \qquad Deg(P) = n$ et $Deg(Q) = n-1$
- $z^n - a^n = (z-a) \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot z^{n-k-1}$

7. Représentation graphique des nombres complexes

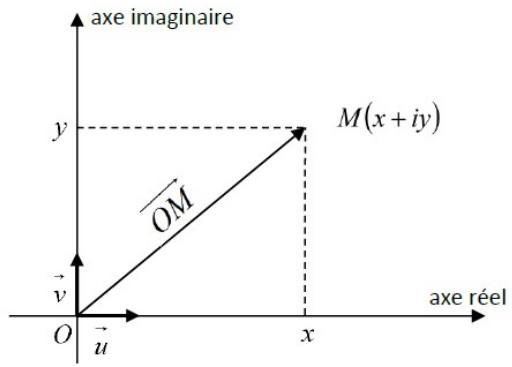
Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$

A tout nombre complexe $z = x + iy$ on associe le point $M(x; y)$

<u>Propriétés</u> :

- *M* s'appelle l'image de *z*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$



8. Forme trigonométrique des nombres complexes

a. Module et argument d'un nombre complexe

Soit le nombre complexe $z = x + iy$ ayant pour image M dans le repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$

On définit le module de *z* par $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ avec $r > 0$

Ou bien $|(z)| = \sqrt{\mathrm{Re}^2(z) + \mathrm{Im}^2(z)}$

On définit un argument de z par $\theta = arg(z) = (\vec{u}; \overrightarrow{OM}) + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

La forme trigonométrique est définie par : $z = |z|(\cos\theta + i \cdot \sin\theta)$

b. Propriétés des modules et arguments

- Modules

- z s'appelle l'affixe de M
- soit I le milieu du segment AB ; I pour affixe $z_I = \dfrac{(z_A + z_B)}{2}$

- Arguments

Produit	$\arg(zz') = \arg z + \arg z' \ (2\pi)$
Inverse	$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z \ (2\pi)$
Quotient	$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \ (2\pi)$
Puissance	$\arg(z^n) = n \arg z \ (2\pi)$

c. Propriétés du conjugué

- $|\bar{z}| = |z|$
- $arg(\bar{z}) = -arg(z)[2\pi]$
- $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

d. Forme algébrique vers forme trigonométrique

Soit le nombre complexe $z = x + iy = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

Produit	$\lvert zz'\rvert = \lvert z\rvert \times \lvert z'\rvert$
Inverse ($z \neq 0$)	$\left\lvert\frac{1}{z}\right\rvert = \frac{1}{\lvert z\rvert}$
Quotient ($z' \neq 0$)	$\left\lvert\frac{z}{z'}\right\rvert = \frac{\lvert z\rvert}{\lvert z'\rvert}$
Puissance ($n \in \mathbb{Z}$)	$\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n$

9. Notation exponentielle

$\forall \theta \in \mathbb{R}$, on pose $e^{i\theta} = \cos\theta + i \cdot \sin\theta$

La forme exponentielle d'un nombre complexe est définie par :

$$z = |z| e^{i\theta}$$

10. Formules d'Euler

$\forall \theta \in \mathbb{R}$ $\quad \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

11. Formule de Moivre

$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$

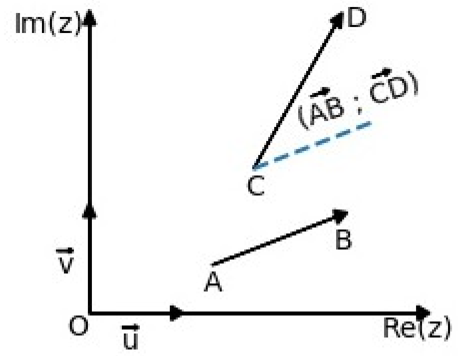
12. Formule de trigonométrie

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$
$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$
$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$
$\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$

13. Nombres complexes et géométrie

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$
Soient A, B, C et D des points du plan d'affixes z_A , z_B , z_C et z_D

- on calcule $|z|$ $\cos\theta = \frac{x}{|z|} = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}$ $\sin\theta = \frac{y}{|z|} = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}$
- on place un point $M(\cos\theta ; \sin\theta)$ sur le cercle trigonométrique
- on détermine $(\vec{u} ; \overrightarrow{OM})$ et l'on indique une valeur de θ



a. Affixe d'un vecteur

A tout nombre complexe $z = x + iy$ on associe le vecteur $\vec{w}(x ; y)$

Propriétés :
- $\vec{w}$ s'appelle le vecteur image de z
- z s'appelle l'affixe de $\vec{w}$

$$\overrightarrow{AB} = z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CD} = z_{\overrightarrow{CD}} = z_D - z_C$$

b. Norme d'un vecteur

$$\|\overrightarrow{AB}\| = AB = |z_B - z_A| \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{CD}\| = CD = |z_D - z_C|$$

c. Argument d'un vecteur

$$arg(\overrightarrow{AB}) = arg(z_B - z_A) = (\vec{u} ; \overrightarrow{AB}) \quad [2\pi]$$

d. Argument de 2 vecteurs

$$arg(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{CD}) = arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{CD}) \quad [2\pi]$$

14. Racines nième de l'unité

Les solutions de l'équation $z^n = 1$ sont les racines $\text{n}^{\text{ième}}$ de l'unité :

$$z_k = e^{\frac{2i\pi k}{n}} \quad \text{avec} \quad 0 \leq k \leq n-1 \quad \text{et} \quad n = Deg(z^n)$$

15. Inégalités triangulaires

$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \qquad |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2| \qquad |z_2| - |z_1| \leq |z_1 - z_2|$