

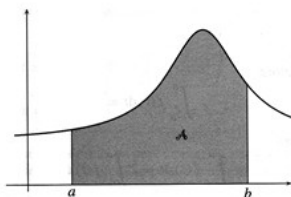
Calcul intégral – Fiche de cours

1. Aires et intégrales

a. Intégrale avec une fonction positive

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle I , et soit a et b appartenant à I tels que $a < b$.

L'aire du plan située entre la courbe f , les droites d'équations $x=a$, $x=b$ et l'axe des abscisses, s'appelle l'intégrale de f sur l'intervalle $[a ; b]$.



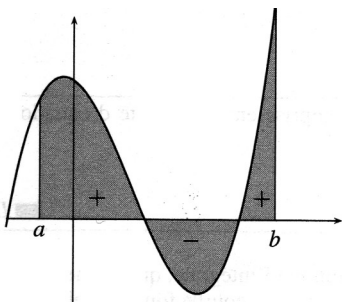
$$A = \int_a^b f(x) dx$$

b. Généralisation aux fonctions continues

Les parties de surfaces situées en dessus de l'axe des abscisses sont comptées positivement.

Les parties de surfaces situées en dessous de l'axe des abscisses sont comptées négativement.

La somme algébrique des surfaces ainsi définies représente l'intégrale de la fonction.



c. Propriétés de l'intégrale

- Existence d'une intégrale sur un intervalle

Toute fonction continue sur $[a ; b]$ admet une intégrale sur cet intervalle.

- Permutation des bornes

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

- Relation de Chasles

Soit une fonction f continue sur un intervalle I . Pour tout nombre a , b et c de I , on a :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

- Linéarité

Soient deux fonctions f et g continues sur un intervalle I . Pour tous nombres réels α et β de I , on a :

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

- Positivité

Soit une fonction f continue sur un intervalle I ; pour tous nombres réels a et b de I tels que $a \leq b$. Si $f \geq 0$ sur $[a ; b]$, alors : $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

- Ordre d'intégration

Soient deux fonctions f et g continues sur un intervalle I pour tous nombres réels a et b de I tels que $a \leq b$.

Si $f \leq g$ sur I , alors : $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

- Inégalité de la moyenne

Sur un intervalle $[a ; b]$, si l'on a $a \leq b$ et $m \leq f \leq M$, alors on a :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

- Valeur moyenne

Sur un intervalle $[a ; b]$: $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

- Primitive et intégrale

Une intégrale est définie par : $A = \int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$

2. Primitives usuelles et opérations

a. Primitive des fonctions de références

Fonction	Primitive	Intervalle
$f(x) = a$	$F(x) = ax$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n} \quad n \neq 1$	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$] -\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$\mathbb{R}$

b. Opération des primitives

Fonction	Primitive	Intervalle
$f = u + v$	$F = U + V$	$D_u \cap D_v$
$f = u' \cdot u^n$	$F = \frac{u^{n+1}}{n+1}$	D_u
$f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$	$F = 2\sqrt{u}$	$D_u \cap u > 0$
$f = \frac{u'}{u^2}$	$F = -\frac{1}{u}$	$D_u \cap u \neq 0$
$f = u' \cdot e^u$	$F = e^u$	D_u
$f = \frac{u'}{u}$	$F = \ln u $	$D_u \cap u \neq 0$
$f = u' \sin u$	$F = -\cos u$	D_u
$f = u' \cos u$	$F = \sin u$	D_u

3. Intégration par partie

$$\int_a^b u' v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$