

Combinatoire et dénombrement – Fiche de cours

1. Cardinal d'ensembles

Soit A et B deux ensembles finis disjoints à a et b éléments

On note $\text{Card}(A)=a$ $\text{Card}(B)=b$ et $\text{Card}(A \cap B)=\text{Card}(\emptyset)=0$

2. Principes additif et multiplicatif

a. Principe additif

Soient une liste finie d'ensembles A_1, A_2, \dots, A_n deux à deux disjoints et n un entier naturel

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$$

$$\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \dots + \text{Card}(A_n)$$

b. Produit cartésien et principe multiplicatif

Produit cartésien :

Le produit cartésien de A et B noté $A \times B$ est l'ensemble des couples formés par les éléments de A et B $\text{Card}(A \times B) = a \cdot b$

Principe multiplicatif : $\text{Card}(A^n) = (\text{Card}(A))^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

c. Autres formules

Soient 3 ensembles A, B, C non disjoints

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$$

$$\begin{aligned} \text{Card}(A \cup B \cup C) &= \text{Card}(A) + \text{Card}(B) + \text{Card}(C) - \text{Card}(A \cap B) \\ &\quad - \text{Card}(A \cap C) - \text{Card}(B \cap C) + \text{Card}(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

3. Dénombrement

a. Partie d'un ensemble

- Définition

Une partie de E est un sous-ensemble composé d'éléments $\in E$ dont le nombre est compris entre 0 et n

- Nombre de parties

Le nombre de parties d'un ensemble E à n éléments est 2^n

b. k-uplets et n-uplets

Soit E un ensemble à n éléments

- 1-uplet de E : un élément $\in E$

- 2-uplet de E (doublet / couple) : liste ordonnée de 2 éléments $\in E$

- 3-uplet de E (triplet) : liste ordonnée de 3 éléments $\in E$

- k-uplet de E : avec $k < n$, liste ordonnée de k éléments $\in E$

- n-uplet de E : liste ordonnée de n éléments $\in E$

c. Factorielle d'un entier naturel (nombre de permutations distinctes)

Soit n un entier naturel non nul ; on appelle factorielle n :

$$n! = 1 \times 2 \times \dots \times n \quad \text{avec } 0! = 1$$

Une permutation d'un ensemble E à n éléments est un n-uplet distinct

Le nombre de permutations de E est $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$

d. Combinaisons distinctes avec ordre

Le nombre d'arrangements ou k-uplets distincts est :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad 0 \leq k \leq n$$

$$A_n^k = n \times (n-1) \times \dots \times (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Le nombre de combinaisons distinctes avec ordre de k éléments parmi n s'appelle nombre d'arrangements de k parmi n

e. Combinaisons distinctes sans ordre

Le nombre de combinaisons à k éléments de E :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad 0 \leq k \leq n$$

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Le nombre de combinaisons distinctes sans ordre de k éléments parmi n s'appelle coefficient binomial de k parmi n

f. Autres formules

Nombre d'arrangements avec répétitions :

Le nombre d'arrangements à k éléments parmi n ($k > n$) est défini par : n^k

Nombre de combinaisons avec répétitions :

Le nombre de combinaisons à k répétitions parmi n éléments est défini par :

$$C_{n+k-1}^k \text{ avec } k = \sum_{i=1}^n k_i$$

k_i nombre de répétitions du $i^{\text{ième}}$ élément

g. Propriétés des combinaisons

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad 0 \leq k \leq n$$

$$\binom{0}{0} = 1 \quad ; \quad \binom{n}{0} = 1 \quad ; \quad \binom{n}{1} = n \quad ; \quad \binom{n}{n-1} = n \quad ; \quad \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

h. Relation et triangle de Pascal

- Relation de Pascal

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad 0 \leq k \leq n \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

- Triangle de Pascal

n/k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1