

# Continuité – Exercices – Devoirs

## Exercice 1 corrigé disponible

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]3 ; +\infty[$  par :

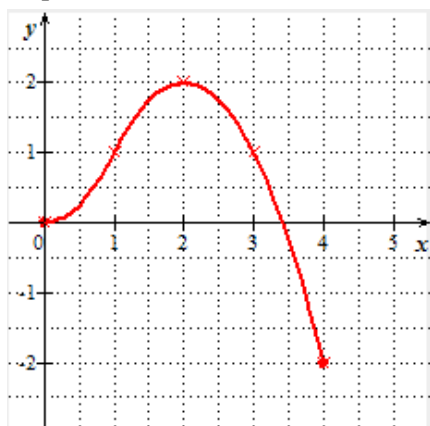
$$f(x) = E(x) \text{ pour } x \in ]3 ; 4[$$

$$f(x) = -x + 4 \text{ pour } x \in ]4 ; +\infty[$$

- Tracer la représentation graphique de cette fonction dans un repère ortho-normal du plan.
- Cette fonction est-elle continue sur  $]3 ; +\infty[$  ? Pourquoi ?

## Exercice 2 corrigé disponible

La fonction donnée ci dessous représente une fonction définie sur  $[0 ; 4]$ .



- Donner le tableau de variation de  $f$ .
  - La fonction  $f$  est-elle continue sur  $[0 ; 4]$  ?
- Sur l'intervalle  $[2 ; 4]$ , pour résoudre l'équation  $f(x) = \frac{3}{2}$ , quel théorème peut-on appliquer et pourquoi ?
  - En appliquant ce théorème à l'intervalle  $[2 ; 4]$ , montrer que l'équation  $f(x) = \frac{3}{2}$  admet une unique solution  $\alpha$ .
  - Donner une valeur approchée de  $\alpha$ .

## Exercice 3 corrigé disponible

Soit  $f$  la fonction définie sur  $] -\infty ; 1[ \cup ] 1 ; +\infty [$  par :  $f(x) = \frac{2x^3 + 2x^2 - 10x + 11}{2(x-1)^2}$

On admet que le tableau de variations de  $f$  est le suivant :

$x$	$-\infty$	1	2.7	$+\infty$
$f(x)$	↗		↘	↗
			6.5	

- Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans l'intervalle  $] -4 ; -1 [$ .
- Donner une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près
- Combien l'équation  $f(x) = 10$  admet-elle de solutions dans l'intervalle  $] 1 ; +\infty [$  ? Justifier.

## Exercice 4 corrigé disponible

$f$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par : 
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 4 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{x-5}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On note  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de  $f$ .

- Montrer que  $f$  est continue en 1.
- $f$  est-elle dérivable en 1 ? Justifier

**Exercice 5** corrigé disponible

$$\text{Soit } f : x \mapsto \begin{cases} e^{3x} + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{2+x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1.  $f$  est-elle continue en 0 ? Justifier.
2.  $f$  est-elle continue sur  $\mathbb{R}$  ? Justifier.

**Exercice 6** corrigé disponible

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ .

1. Déterminer les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Justifier alors que  $f(x) = 2$  admet trois solutions sur  $[-4 ; 4]$ .

**Exercice 7** corrigé disponible

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 4$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \frac{6}{u_n + 1}$ .

1. Déterminer la fonction  $f$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .
2. Vérifier que si  $x \in [0 ; 6]$ , alors  $f(x) \in [0 ; 6]$ .
3. On admet que la suite  $(u_n)$  converge vers un réel  $\ell \in [0 ; 6]$ . Déterminer la valeur de  $\ell$ .

**Exercice 8** corrigé disponible

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 2$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 4}$ .

1. Déterminer la fonction  $f$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .
2. Vérifier que si  $x \in [2 ; 5]$ , alors  $f(x) \in [2 ; 5]$ .
3. On admet que la suite  $(u_n)$  converge vers un réel  $\ell \in [2 ; 5]$ . Déterminer la valeur de  $\ell$ .

**Exercice 9** corrigé disponible

Trouver la valeur de  $k$  telle que la fonction définie par

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2 + e^{x-1} & \text{si } x \leq 1 \\ x + k & \text{si } x > 1 \end{cases} \text{ soit continue sur } \mathbb{R}.$$

**Exercice 10** corrigé disponible

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[-6 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = \sqrt{6+x}.$$

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Montrer par récurrence que  $(u_n)$  est une suite croissante, majorée par 3.
2. Que peut-on dire de la convergence de la suite ?
3. Déterminer alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

### Exercice 11 corrigé disponible

1) Soit le polynôme  $P$  défini sur  $\mathbb{R}$  par :  $P(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$

- Calculer les limites en  $+\infty$  et  $-\infty$  du polynôme  $P$
- Déterminer les variations de  $P$  sur  $\mathbb{R}$ .
- Démontrer que l'équation  $P(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$  et que  $\alpha \in [-1, 0]$ .
- Donner un encadrement de  $\alpha$  à  $10^{-5}$
- Déterminer le signe de  $P(x)$  suivant les valeurs de  $x$

### Exercice 12 corrigé disponible

Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 - 3x^2$

- Etudier les limites de  $f$  en  $+\infty$  et  $-\infty$  et dresser son tableau de variations.
- Soit  $(E)$  l'équation  $x^3 - 3x^2 = 5$   
Montrer que  $(E)$  admet une solution  $\alpha$  unique sur  $\mathbb{R}$  et déterminer une valeur approchée par défaut de  $\alpha$  à  $10^{-3}$ .
- Démontrer que  $\alpha = \sqrt{\frac{5}{\alpha - 3}}$

### Exercice 13 corrigé disponible

On considère la fonction  $f$  définie par 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{-2x^2 + 3x + 2} & \text{si } x \neq 2 \\ f(2) = a & (a \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

Quelle valeur doit-on donner à  $a$  pour que la fonction  $f$  soit continue sur  $\mathbb{R}$  ?

### Exercice 14 corrigé disponible

Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1} & \text{si } x \neq -1 \\ m & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

Quelle valeur doit-on donner à  $m$  pour que la fonction  $f$  soit continue sur  $\mathbb{R}$  ?

### Exercice 15 corrigé disponible

Soit  $f$  la fonction définie par 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{3x^2 - 2x - 1}{-2x^2 + 5x - 3} & \text{si } x < 1 \\ f(1) = 4 \end{cases}$$

Etudier la continuité de  $f$  en 1