Continuité – Exercices – Devoirs

Exercice 1 **corrigé disponible**

On considère la fonction f définie sur $[\,3\,;+\infty\,[$ par :

$f(x) = E(x)$ pour $x \in [3\,;4[$

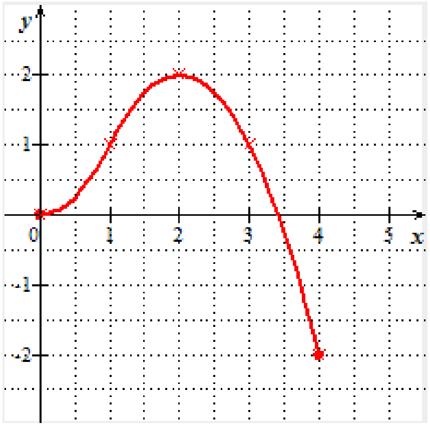
$f(x) = -\,x + 4$ pour $x \in [\,4\,;+\infty\,[$

a. Tracer la représentation graphique de cette fonction dans un repère orthonormal du plan.

b. Cette fonction est-elle continue sur $[3\,;+\infty\,[$? Pourquoi ?

Exercice 2 **corrigé disponible**

La fonction donnée ci dessous représente une fonction définie sur [0 ;4].



1. a. Donner le tableau de variation de f.

b. La fonction f est-elle continue sur [0 ; 4] ?

2.a. Sur l'intervalle [2 ; 4], pour résoudre l'équation $f(x)=\dfrac{3}{2}$, quel théorème peut-on appliquer et pourquoi ?

b. En appliquant ce théorème à l'intervalle [2 ; 4], montrer que l'équation $f(x)=\dfrac{3}{2}$ admet une unique solution α.

c. Donner une valeur approchée de α.

Exercice 3 **corrigé disponible**

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;1\,[\,\cup\,]\,1\,;+\infty\,[$ par : $f(x)=\dfrac{2x^3+2x^2-10x+11}{2(x-1)^2}$

On admet que le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$		1		2.7		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$\Vert$	$\searrow$	$6{,}5$	$\nearrow$	

a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]-4\,;-1\,[$.

b. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près

c. Combien l'équation $f(x) = 10$ admet-elle de solutions dans l'intervalle $]\,1\,;+\infty\,[$? Justifier.

Exercice 4 **corrigé disponible**

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 - x - 4 & \text{si } x \leqslant 1 \\ f(x) = \dfrac{x-5}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.

1) Montrer que f est continue en 1.

2) f est-elle dérivable en 1 ? Justifier

Exercice 5 corrigé disponible

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} e^{3x}+1 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \sqrt{2+x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

1. f est-elle continue en 0 ? Justifier.

2. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Justifier.

Exercice 6 corrigé disponible

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$.

1. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.

2. Justifier alors que $f(x) = 2$ admet trois solutions sur $[-4 ; 4]$.

Exercice 7 corrigé disponible

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{6}{u_n + 1}$.

1. Déterminer la fonction f telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

2. Vérifier que si $x \in [0 ; 6]$, alors $f(x) \in [0 ; 6]$.

3. On admet que la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \in [0 ; 6]$. Déterminer la valeur de ℓ.

Exercice 8 corrigé disponible

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 4}$.

1. Déterminer la fonction f telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

2. Vérifier que si $x \in [2 ; 5]$, alors $f(x) \in [2 ; 5]$.

3. On admet que la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \in [2 ; 5]$. Déterminer la valeur de ℓ.

Exercice 9 corrigé disponible

Trouver la valeur de k telle que la fonction définie par $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 + e^{x-1} & \text{si } x \leqslant 1 \\ x + k & \text{si } x > 1 \end{cases}$ soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 corrigé disponible

Soit f la fonction définie sur $[-6 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{6+x}.$$

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

1. Montrer par récurrence que (u_n) est une suite croissante, majorée par 3.

2. Que peut-on dire de la convergence de la suite ?

3. Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 11 corrigé disponible

1) Soit le polynome P défini sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$

   a) Calculer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ du polynome P
   b) Déterminer les variations de P sur $\mathbb{R}$.
   c) Démontrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et que $\alpha \in [-1, 0]$.
   d) Donner un encadrement de α à 10^{-5}
   e) Déterminer le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x

Exercice 12 corrigé disponible

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2$

1. Etudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$ et dresser son tableau de variations.
2. Soit (E) l'équation $x^3 - 3x^2 = 5$

   Montrer que (E) admet une solution α unique sur $\mathbb{R}$ et déterminer une valaur approchée par défaut de α à 10^{-3}.

3. Démontrer que $\alpha = \sqrt{\dfrac{5}{\alpha - 3}}$

Exercice 13 corrigé disponible

On considère la fonction f définie par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{-2x^2 + 3x + 2} & \text{si } x \neq 2 \\ f(2) = a & (a \in \mathbb{R}) \end{cases}$

Quelle valeur doit-on donner à a pour que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 14 corrigé disponible

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} & \text{si } x \neq -1 \\ m & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

Quelle valeur doit-on donner à m pour que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 15 corrigé disponible

Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{-2x^2 + 5x - 3} & \text{si } x < 1 \\ f(1) = 4 & \end{cases}$

Etudier la continuité de f en 1